

# ANNALEN DER PHYSIK.

WÖCHENTLICH VON WOCHENBLATT GEZOGEN

F. L. C. REIN, L. V. GILBERT, J. C. FUCHSCHMITZ, C. v. K. WIEDEMANN, F. KERSE.

VIERTE FOLGE.

Band 45. Heft 3.

DEUTSCHE EDITION BEI JOHANN AMBROSIUS BANTZ.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, K. WÄHLER.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GEMEINSCHAFT

HERAUSGEGEGEN VON  
W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG, 1914.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BANTZ.  
DÖRFLERSTRASSE 18.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postbüros und von der Verlagsbuchhandlung ausgeführt. Preis für den  
in 15 Heften (= 3 Bänden) auszugebenden Band 45. 1914.  
(abzüglich eines 25%igen Rabatts)

# Inhalt.

	Seite
1. F. Paschan. Absorption und Resonanz monochromatischer Strahlung . . . . .	625
2. A. Kalißne. Die Wellenbewegung um eine transversal schwingende Saite in unbegrenzter Flüssigkeit . . . . .	657
3. Hans Schimank. Über das Verhalten des elektrischen Widerstands von Metallen bei tiefen Temperaturen . . . . .	706
4. W. C. Röntgen. Pyro- und piezoelektrische Untersuchungen	737

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwandten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen unterer Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschriften der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahressahl aufzuführen.

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 45.

1. *Absorption*  
*und Resonanz monochromatischer Strahlung;*  
*von F. Paschen.*

Das Heliumspektrum besteht aus zwei Seriensystemen, deren Grundlinien 10830 und 20582 Å.-E.<sup>1)</sup> die bei weitem größte Energie der gesamten Strahlung haben. Reines Heliumgas in der positiven Lichtsäule der Glimmentladung oder auch in anderen Teilen der Geißlerröhre absorbiert die Energie dieser Strahlen schon bei schwachen Stromdichten ( $10^{-7}$  Amp./qcm), bei denen die Intensität der Emission dieser und der sichtbaren Linien kaum bemerkbar ist. Doch ist ein Strom im Gase notwendig, um die Absorption hervorzurufen. Es steigt die Linienabsorption bei Vermehrung der Stromstärke schnell bis zu einem asymptotisch erreichten Maximum. Die sichtbaren Linien des Helium sind in der Emission auch bei sehr schwachen Strömen bemerkbar. Doch erreicht die Linienabsorption für sie erst bei etwa  $10^4$  mal höheren Stromdichten als für obige Grundlinien beobachtbare Beträge. Die Hauptenergie des Spektrums besitzt die Linie 10830. Der Betrag der Linienabsorption steigt für sie in Schichten von ca. 30 cm Länge auf 95 Proz.

Die Frage nach dem Verbleib der absorbierten Lichtenergie förderte eine besondere Art von Resonanzstrahlung der stärksten Linie 10830 Å.-E. zutage, deren nähere Untersuchung interessante Phänomene ergab. Das einfachste und auch wohl interessanteste Resultat dürfte das sein, daß in dem schwingenden Heliumteilchen ein Resonator vorliegt, der, wie hier bewiesen werden soll, die Grundeigenschaft des von Planck in die Theorie eingeführten elektrischen Resonators besitzt, alle Energie, die er absorbiert, wieder in den Raum hinauszustrahlen.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. p. 551. 1908.

Diese Phänomene der Linienabsorption und Resonanz gaben Anlaß zu einer Reihe von einzelnen Untersuchungen über Wellenlänge und Struktur der absorbierten und der Resonanzstrahlung, ferner über die Temperatur der monochromatischen Strahlung. Diese sollen in diesem Aufsatz mitgeteilt werden. Andere Untersuchungen, z. B. über die Breite der Absorptions- und Emissionslinien, obwohl vor einem Jahre schon als abgeschlossen betrachtet, möchte ich noch etwas weiterführen und daher zurückstellen. Ebenso hoffe ich, den Mechanismus der elektrischen Anregung studieren zu können, durch den aus dem Heliummolekül ein Resonator für 10830 Å.-E. wird. Denn hierdurch unterscheidet sich das Heliumgas von dem Natriumdampf und dem Quecksilberdampf, daß es einer Anregung bedarf, um Resonator zu werden. Die Abhängigkeit der Absorption und Resonanz von der erregenden Stromstärke, welche durch die experimentelle Anordnung leicht erhalten wird, und welche hier in einigen typischen Beispielen wiederzugeben ist, dürfte ein verwickeltes Phänomen sein, welches klarerer Analyse bedarf.

#### Versuchsanordnungen.

Zur Isolierung der Linien diente anfangs ein Spektro-  
bolometer mit Quarzprisma. Mit ihm sind die Versuchs-  
anordnungen zum Studium der Absorption der beiden Linien  
ausgearbeitet, und die meisten Versuche über die Abhängigkeit  
der Absorption von der Stromstärke, sowie über die Linien-  
breite ausgeführt. Nach Ausarbeitung der monochromatischen  
Filter zur Isolierung der beiden Linien<sup>1)</sup> konnte der Spektral-  
apparat entbehrt werden. Man gewann durch die Filter an  
verfügbarer Energie und an Experimentiermöglichkeiten. Durch  
Verwendung des Vakuumgalvanometers<sup>2)</sup> verfeinerte man die  
Messungen beträchtlich.

Das Phänomen der Absorption und Resonanz setzt eine  
bedeutende Reinheit des Heliums voraus. Die geringste Verun-  
reinigung, besonders durch Wasserstoff, vermindert die Ab-  
sorption. Die gewöhnlichen Reinigungsmethoden genügen nicht.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 43. p. 858 u. A. Ignatieff, Ann. d. Phys. 43. p. 1117. 1914.

2) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 14. p. 521. 1913.

Helium, welches lange Zeit über Kohle in flüssiger Luft gestanden hat, ist nicht rein genug. Seit etwa 5 Jahren wende ich das folgende einfache und wirksame Verfahren an, bei dem vor allem auch die Elektroden mit gereinigt werden.

Man läßt kleine Mengen reinen, elektrolytisch hergestellten Sauerstoffgases in die Röhre, die man mit konstantem Strome treibt. In kurzer Zeit verschwindet der Sauerstoff und mit ihm die Verunreinigungen. Durch wiederholte Zugabe von Sauerstoff läßt sich ein Grad der Reinheit gewinnen, dem ein Maximum der Absorption entspricht. Mit Quarzglasröhren und im Vakuum geglühten Aluminiumelektroden bleibt das Gas längere Zeit von dieser Reinheit. Durch Zugabe von frischem Sauerstoff läßt es sich stets wieder in denselben Zustand bringen. Eine Röhre, die mit Helium von etwa 5 mm Druck gefüllt war, wurde im Laufe eines halben Jahres wöchentlich einmal mit Sauerstoff gereinigt. Die Menge Helium, ihre Leuchtintensität und ihr Absorptionsvermögen bei bestimmtem Strome blieben während dieser Zeit dieselben. Das Verfahren ermöglichte kurz mit Helium exakt reproduzierbare Bedingungen herzustellen, wie es sonst bei Geißlerröhren nicht bekannt ist. Über den Verbleib der verschwundenen Sauerstoffmengen weiß ich nichts Sichereres. Zum Teil werden sie an die zerstäubte Kathodenmaterie gehen und Wasserdampf und Kohlensäure an die Wände. Doch sind die im Laufe der Zeit zugeführten Sauerstoffmengen so beträchtliche, daß ihr völliges Verschwinden wohl noch andere Ursachen haben wird.

Zwei getrennte Bornhäusersche Batterien von je 2000 Volt (meist in Parallelschaltung zu 1000 Volt benutzt) dienten zum Treiben der Emissions- und Absorptions- resp. Resonanzröhren. Als Röhren nahm ich meist Quarzglasröhren mit Aluminiumelektroden von ähnlicher Form wie früher beschrieben.<sup>1)</sup> Die Kathoden wurden stets durch fließendes Wasser gekühlt. Anfangs meinte ich, daß zur Absorption bedeutende Schichtlängen nötig wären und nahm Glasröhren von 50 cm Länge mit planen Fenstern an den Enden und seitlich angesetzten Elektrodenröhren. Ihr Querschnitt mußte groß sein (Durchm. 3—5 cm), da das Licht der Emissionsröhre als paralleles Strahlenbündel

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 27. p. 541. 1908.

hindurchzuleiten war, und da sonst nicht genügend Energie in den Spektralapparat gelangte. Es war außerordentlich langwierig, das Gas in diesen Röhren rein zu machen. Allein es zeigte sich, daß die Absorptionen schon bei einer Schichtlänge von 5 mm außerordentlich große sind. Dies vereinfachte die Apparatur und das Reinigungsverfahren bedeutend. Es diente eine zweite Quarzglas-Geißlerröhre als Absorptions- resp. Resonanzröhre, die statt einer Kapillaren eine 5 mm weite Röhre besaß. Diese und die Kapillare der Emissionsröhre standen vertikal.

Zur Beobachtung der Absorption bildete man die Kapillare der Emissionsröhre in der Achse der Röhre der Absorptionslampe ab so, daß ein Hohlspiegel das herauskommende Licht zu einem zweiten Bilde auf der Thermosäule vereinigte. Ohne Erregung der Absorptionsröhre erhielt man die Anfangsintensität, mit Erregung die hindurch gelassene Intensität, nachdem die Eigenstrahlung der Absorptionsröhre kompensiert war. Bildete man andererseits die Kapillare der Emissionslampe so auf der Röhre ab, daß das hindurch gegangene Licht nicht zur Thermosäule gelangte, so konnte man die Resonanzintensität beobachten, wobei etwa an den Röhrenwänden diffundiertes Licht bei unerregter Resonanzlampe gemessen wurde. Dies war vom Resonanzausschlag abzuziehen. Die Eigenschaft des Gases, unerregt nicht zu absorbieren und keine Resonanz zu zeigen, ermöglichte so außerordentlich exakte Messungen.

Für die feineren Versuche über den Betrag der in Resonanz verwandelten Energie und besonders über die Temperatur der monochromatischen Strahlung war es nötig, die Reflexionen an den Wänden auf ein Minimum herabzusetzen. Dazu diente eine Röhre, welche aus vier planen Quarzplatten geblasen war, und innen einen quadratischen Querschnitt von 5 qmm hatte. Sie war von Heraeus gefertigt (vgl. R Fig. 8), mußte aber von mir an die Röhre geblasen und nachher von sublimierter Kieselsäure befreit werden. Dabei litt die Planheit der Wände ein wenig, ohne daß indessen dadurch ein Schaden entstand.

Zur Erzielung bedeutender Resonanzintensität, die zur interferometrischen Messung des Resonanzlichtes erforderlich

war, dienten vier genau sphärische versilberte Konkavspiegel aus Glas von je 22 cm Öffnung und 41 cm Krümmungsradius. In der Nähe der Krümmungszentra standen Emissions- und Resonanzröhre. Mit ihnen konnte ich eine Resonanz von mehr als 500 mm Skalenausschlag mittels des Vakuumgalvanometers erzielen, so daß genügend Energie zur feinen Messung übrig blieb, nachdem das Licht die versilberten Interferometerplatten passiert hatte.

Es war notwendig, die Eigenstrahlung der Absorptions- resp. Resonanzröhre zu kompensieren. Denn nur dann ließ sich das hindurchgelassene oder das Resonanzlicht einfach und genau durch Aufziehen eines Schirmes vor den betreffenden Spiegeln durch einen einzigen Galvanometerausschlag messen. Die Kompensation geschah durch folgende Schaltung: Von zwei Punkten eines etwa 3 mm dicken Kupferdrahtes, der ein Stück des Kreises Thermosäule-Galvanometer war, zweigte man ab zu einem zweiten Kreis, der aus einem Akkumulator, einem Rheostatenkasten von 100 000  $\Omega$  und einem Stromschluß bestand, und dessen Strom dem Thermosäulenstrom entgegen gerichtet war. Man stöpselte solchen Widerstand, daß beim Stromschluß der Strahlungsausschlag kompensiert war. Diese Anordnung gestattet auch, durch den Kompensationswiderstand die Eigenstrahlung der Röhre zu messen, selbst wenn der Ausschlag ein Mehrfaches der Skalenlänge war. Nur mußte man in diesem Falle gleichzeitig die Strahlung zur Thermosäule lassen und den Schlüssel schließen, da andernfalls das Galvanometer in Unordnung geraten konnte. Der Skalausschlag  $n$  und der entsprechende Kompensationswiderstand  $W$  sind einander umgekehrt proportional  $n = C/W$ . Die Konstante  $C$  wurde durch Messung desselben Thermostromes mittels  $n$  und  $W$  gefunden. So konnten die Widerstände auf Skalausschläge umgerechnet werden. Auch zur dauernden Kontrolle der Proportionalität der Galvanometerausschläge mit der Stromstärke ist diese Anordnung brauchbar, wenn alle Teile der Abzweigung und der Galvanometeranordnung gut von der Erde isoliert sind.

**Bezeichnungen in Tabellen, Zeichnungen und im Text.**

*E* Emissionsröhre für Beobachtungen der Absorption und Resonanz.

*i<sub>E</sub>* Stromstärke in *E*.

$A$  Absorptionsröhre.  
 $i_A$  Strom in  $A$ .  
 $R$  Resonanzröhre.  
 $i_R$  Strom in  $R$ .  
 $S_A$  Spiegel hinter  $A$ , bildet  $E$  auf  $A$  ab.  
 $S_R$  Spiegel vor  $R$ , bildet  $E$  auf  $A$  ab, jedoch so, daß ihr Licht direkt nicht zur Thermosäule gelangt.  
 $S_T$  Spiegel vor Thermosäule, um ein Bild von  $E$ ,  $A$  oder  $R$  auf ihr zu entwerfen.  
 $K_S$  Schirm, der das Licht vom Spiegel  $S$  abschirmt. Wenn er geöffnet wird, tritt das Licht zu.  $K_{SA}$ ,  $K_{SR}$  sind Schirme vor den Spiegeln der Indizes,  $K_T$  ein Schirm vor der Thermosäule.  
 $J_0$  einfallende Lichtenergie,  $J_R$  Resonanzenergie,  $J'$  durchgelassenes Licht,  $a = (J_0 - J')/J_0$  Adsorptionsbetrag.  $J_A$  Eigenstrahlung des absorbierenden Gases.

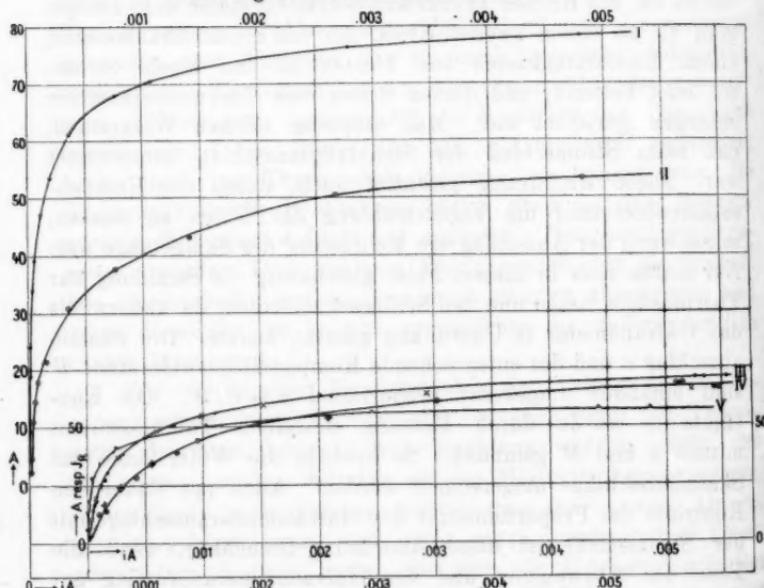


Fig. 1.

## I. Allgemeines über Absorption und Resonanz.

Hierzu: Fig. 1  $a$  resp.  $J_R$  als Funktion von  $i_A$  resp.  $i_R$ .  
 Kurve I 10830 Absorption in 30 cm langer Schicht. Druck ca. 3 mm.  $i_E = 0,096$  Amp.

Kurve II 20582 Absorption in 30 cm langer Schicht.  
Druck ca. 3 mm.  $i_E = 0,096$  Amp.

Kurve III—V Absorption in 5 mm langer Schicht der  
Resonanzröhre.  $i_E = 0,047$  Amp. Druck in  $E$  ca. 5 mm.

Kurve III mittlerer Druck, ca. 5 mm, ...  $A$ ,  $\times \times J_R$ .

Kurve IV niederer Druck, ca. 1,5 mm,  $\odot \odot \odot A$ ,  $\diamond \diamond J_R$ .

Kurve V hoher Druck, ca. 14 mm,  $\wedge \wedge J_R$ .

Fig. 2  $J_A$  (Eigenenergie von  $A$ ) als Funktion von  $i_A$ ,  
Kurve IIIa mittlerer Druck (entspricht Kurve III oben),  
Kurve IVa niederer Druck (entspricht Kurve IV oben).

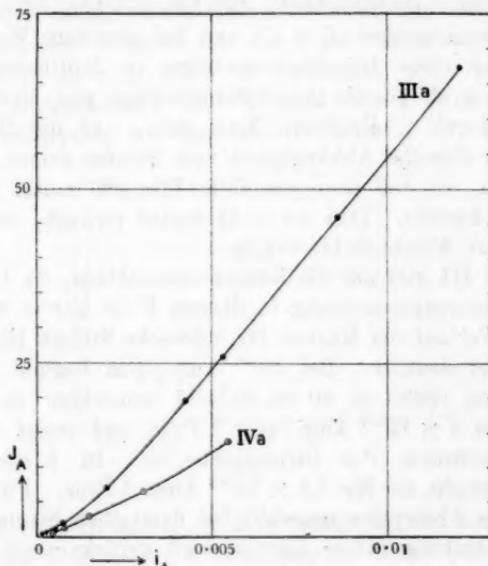


Fig. 2.

Die Kurven zeigen die Abhängigkeit des Absorptions-  
betrages der Linienabsorption oder der Resonanz von der  
Stromstärke  $i_A$  resp.  $i_R$ . Bei der Schichtdicke von 5 mm,  
Kurven III—V, sind für verschiedene Gasdrücke Verschieden-  
heiten da. Bei der Schichtdicke von 30 cm des absor-  
bierenden Gases sind bei reinem Gas die Unterschiede  
jedenfalls geringer und es stellt Kurve I für Drucke zwischen  
1 und 7 mm die Abhängigkeit der Absorption von  $i_A$  für

10830, Kurve II für 20582 dar. Beide Kurven ändern sich nur noch wenig, wenn  $i_E$ , und beträchtlicher, wenn der Gasdruck in  $E$  verändert wird.  $\alpha$  nimmt mit abnehmendem Gasdruck in  $E$  zu. Bei einem Druck von 1,5 mm in  $E$  erzielte ich mit höherem  $i_A$  bis 95 Proz. Absorption für 10830 und bis zu 60 Proz. für 20582. In beiden Fällen wird der maximale Absorptionsbetrag bedeutend herabgedrückt und der Anstieg bedeutend weniger steil, wenn das Gas im geringsten verunreinigt ist.

In die Kurven III und IV sind Beobachtungen des Resonanzbetrages eingezeichnet, die bei gleichen Stromstärken in der Resonanzröhre ( $i_R = i_A$ ) und bei gleichem Wert  $i_E$  erhalten sind. Die Resonanzausschläge in Millimeter waren doppelt so groß als die Absorptionsbeträge und sind einfach sämtlich durch 2 dividiert. Man sieht, daß die Resonanzausschläge dieselbe Abhängigkeit vom Strome zeigen, wie die Absorption, so daß also jedenfalls Proportionalität zwischen  $J_R$  und  $\alpha$  besteht. Dies ist nicht weiter verfolgt, da es sich ohnehin aus Abschnitt III ergibt.

Kurve III gibt nur die Resonanzausschläge, da die Röhre bei der Absorptionsmessung in diesem Falle unrein wurde.

Der Verlauf der Kurven für schwache Ströme ist aus der Figur nicht deutlich. Bei  $10^{-7}$  Amp./qcm beginnt die Absorption von 10830 in 30 cm Schicht bemerkbar zu werden, erreicht bei  $4 \times 10^{-7}$  Amp./qcm 1 Proz. und steigt zunächst nahe proportional der Stromdichte an. In 5 mm dicker Schicht erreicht sie für  $5,5 \times 10^{-6}$  Amp. 1 Proz. Für 20582 beginnt die Absorption ungefähr bei demselben Strom.

Die Deutung dieser Kurven muß zurückgestellt werden. Hier sei nur folgendes erwähnt.

Beobachtet ist das Verhältnis von Integralwerten.<sup>\*\*</sup> Ist die Energie in der Emissionslinie nach Rayleighs Kurve verteilt und befolgt der Absorptionskoeffizient dasselbe Gesetz, so ist beobachtet:

$$f_{(x)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K\lambda^2} d\lambda - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K\lambda^2} e^{-x} e^{-K\lambda^2} d\lambda}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K\lambda^2} d\lambda},$$

wo  $x$  den Absorptionskoeffizienten in der Mitte der Linie ver- stellt. Die Funktion  $f_{(x)}$  habe ich für verschiedene Werte  $x$  durch graphische Integration berechnet<sup>1)</sup> und finde, daß sie von  $x$  eine ähnliche Abhängigkeit besitzt wie das beobachtete Absorptionsvermögen von der Stromstärke. Würde diese Beziehung strenge dieselbe sein, so würde das bedeuten, daß der Absorptionskoeffizient und daher die Zahl der Resonatoren von einem bestimmten Strome an proportional der Stromstärke zunimmt. Die Emission des absorbierenden Gases hat ungefähr eine solche Abhängigkeit vom Strome (vgl. Fig. 2). Der Verlauf der theoretischen Kurve ist aber nur sehr roh der selbe (schneller Anstieg von  $x = 0$  an, dann asymptotische Annäherung an  $f_{(\infty)} = 1$ ), so daß noch weiteres für die Deutung heranzuziehen ist. Es wird sich z. B. der Wert  $K$  für die Absorption mit dem Strome ändern.

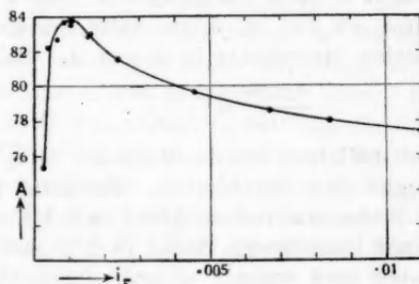


Fig. 3.

Bei bestimmtem  $i_A$  ist  $a$  in 5 mm Schicht noch von dem Gasdrucke in  $E$  und von  $i_E$  abhängig. Gleiche Gasdrucke in  $E$  und  $A$  ergeben hier  $i \cdot A$ , die größten Absorptionsbeträge.  $J_E$  hängt außerdem noch von  $J_0$ , also von der Energie der Strahlung von  $E$  ab. Die Röhren hingen an demselben Röhrensystem. Gewöhnlich arbeitete man mit etwa 5 mm Gasdruck in beiden Röhren, bei welchem Druck die Strahlungsenergie der fraglichen (und auch der sichtbaren) Linien für mittlere hier benutzte Stromstärken ein Maximum besitzt. Die

1) Man sehe auch A. v. Malinowskis Berechnung für kleine Werte  $x$  durch Reihenentwicklung, Journ. de Phys. 4. p. 277. April 1914.

Abhängigkeit der Werte  $a$  vom Gasdruck ist im übrigen noch nicht systematisch untersucht.

Die Abhängigkeit der Absorption in 5 mm Schichtdicke bei konstantem Wert  $i_A$  von  $i_E$  zeigt folgende Tabelle für 1083. In beiden Röhren war der Druck ca. 5 mm, graphisch dargestellt Fig. 3.

$i_A = 0,0122$ Amp.						
$i_E$ Amp.	0,00024	0,00040	0,00063	0,00084	0,00105	0,00106
$a$ Proz.	75,3	82,2	82,7	83,7	83,8	83,5
$i_E$ Amp.	0,00157	0,00236	0,00458	0,0067	0,0084	0,0110
$a$ Proz.	82,9	81,5	79,7	78,6	78,0	77,4
$i_E$ Amp.	0,0237	0,0530				
$a$ Proz.	76,2	75,8				

Ein Maximum der Absorption entspricht  $i_E = 0,0010$ . Da der Stromfaden in  $E$  einen Durchmesser von etwa 1,5 mm und in  $A$  einen solchen von ca. 5 mm hatte, so entspricht das Maximum gleicher Stromdichte in  $E$  und  $A$ . Es ist

$$\frac{0,0010}{0,0122} = \left( \frac{1,5}{5,28} \right)^2.$$

Für  $i_A = 0,0061$  fand sich das Maximum bei  $i_E = 0,0005$  A. Mit 20582 ergab sich ebenfalls ein Maximum bei gleicher Stromdichte mit ebenso schnellem Abfall nach kleineren Werten von  $i_E$ , aber mit langsamerem Abfall nach großen Werten  $i_E$ . Die Maximalwerte sind zugleich so groß, wie die Absorptionen von  $J_A$  für das eigene Licht (vgl. Abschn. III). Diese befolgen als Funktion von  $i_A$  Kurve I Fig. 1, sind also in einer 5 mm langen Schicht schon so groß wie in einer 30 cm langen. Bei kleineren Werten  $i_A$  beobachtete man für  $J_E$  eine bis zu dreimal kleinere Absorption als für  $J_A$ .

Diese Beobachtungen zeigen, daß für möglichst hohe Absorptionswerte eine möglichst große Gleichartigkeit aller Bedingungen günstig ist. Der Abfall der Kurven nach großen Werten  $i_E$  ist verständlich, da die Emissionslinie mit wachsendem Strom  $i_E$  breiter wird, aber der Abfall nach kleineren Werten  $i_E$  ist unerwartet.

Bei größeren Werten  $i_E$  ist die Temperatur der Kapillaren von  $E$  erhöht, und daher die Dopplerverbreiterung der Emissionslinie eine größere. Bei Werten  $i_E < 0,001$  Amp. ist die

Temperaturerhöhung aber gering, und sie ändert sich mit abnehmender Stromstärke wenig. Hier könnte noch die Verkürzung der Schwingungen durch Zusammenstoß mit Elektronen, welche bei höherem Strome im Mittel größer sein wird, wirken. Nach Abschn. III erzeugen die Elementarwellenzüge das Phänomen der Absorption und Resonanz. Jeder Wellenzug würde einer Linie entsprechen, die nur noch durch Zusammenstoß mit Molekülen und Elektronen verbreitert ist, die aber bei den Weglängen in der Geißlerröhre für 10830 fast 1000mal geringere Breite hat, als die Breite der beobachteten Linie. Das Licht eines Resonators in  $E$  wird in  $A$  um so mehr absorbiert, je mehr gleichartige Resonatoren es in  $A$  vorfindet: Gleichartige 1. in der Größe und Richtung der Translationsbewegung, 2. in der Länge des ungestört durch Stöße ausgeführten Wellenzuges. Es erscheint einleuchtend, daß die gegenseitige Einwirkung in jedem Falle kleiner ist, ob das Licht in  $E$  oder die Resonatoren in  $A$  kürzere Wellenzüge haben, so daß das Maximum der Einwirkung dann vorhanden ist, wenn im Mittel die Schwingungen von  $E$  und  $A$  gleichartig sind. Dies ist bei gleichem Gasdruck und gleicher Stromdichte der Fall. Schließlich ist das Phänomen ein statistisches, da die relativen Frequenzen zeitlich wechseln. Die Absorption wächst mit der Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Vorhandenseins äquivalenter Frequenzen in  $A$  und  $E$ . Diese ist cet. par. proportional mit der Zahl vorhandener Resonatoren, also auch mit der Schichtdicke und angenähert mit dem Strom.

Es könnte auch sein, daß verschiedene Ströme verschiedene Anregungen der Resonatoren bewirken, wodurch Verschiedenheiten in den Wellenzügen entstehen.

Auch dieser Gegenstand wird mit Berücksichtigung des Gasdruckes weiter untersucht werden.

Es sind anfangs Versuche gemacht, um zu sehen, ob der Resonanzbetrag proportional der auffallenden Energie ist, wobei natürlich die Qualität dieser Energie dieselbe sein mußte. Man nahm bei bestimmtem Werte  $i_E$  zwei Spiegel  $S_R$  und beobachtete ihre Einzel- und Summenwirkung. Man fand stets, auch bei sehr schwachem Strome  $i_E$ , daß die Summe der Einzelwirkungen ebenso groß war wie der beobachtete Ausschlag, den beide Spiegel kombiniert erzeugten. Da aus dem

späteren hervorgeht, daß alles absorbierte Licht als Resonanzlicht wieder auftritt, und da der absorbierte Betrag proportional der Anfangsenergie ist bei gleicher Qualität der Strahlung (die Energie  $J_E$  wird durch Änderung der Öffnung von  $S_A$  verändert), so ist die Proportionalität der Resonanzenergie mit der auffallenden Energie selbstverständlich und braucht nicht besonders bewiesen zu werden.

## II. Wellenlänge und Struktur der Resonanzstrahlung.

Von der ohne Filter erzeugten Resonanzstrahlung absorbiert das  $1\mu$ -Filter 70 Proz. Das ist genau der Betrag der Absorption der Heliumlinie 10830 in dem Filter. Hierbei fällt das gesamte Licht der Emissionsröhre auf die Resonanzlampe. Die Resonanzstrahlung besteht demnach hauptsächlich aus dem Lichte von 10830. Setzt man das  $1\mu$ -Filter einmal vor das Beleuchtungsfenster und dann vor das Beobachtungsfenster der Resonanzlampe, so erhält man dieselbe Resonanzenergie. Im ersten Falle wirkt die Energie  $\alpha \cdot J$  der Linie 10830 Resonanz erregend, und man beobachtet  $\varepsilon \alpha J$  (J Strahlungsenergie der Wellenlänge 10830 von  $E$ , welche in die Resonanzlampe reflektiert wird.  $\alpha$  Durchlässigkeit des Filters.  $\varepsilon$  die in der Beobachtungsrichtung wahrgenommene Resonanzenergie, welche durch die Energie 1 erzeugt wird). Im zweiten Falle beobachtet man den Betrag  $(J\varepsilon + S\varepsilon')\alpha$ . Da dies gleich  $J\varepsilon\alpha$  (im ersten Fall) gefunden wird, ist  $S\varepsilon'$  die etwa vom übrigen Heliumspektrum erzeugte Resonanzstrahlung der Wellenlänge 10830 gleich Null. Also wird die Resonanzstrahlung nur von der Linie 10830 erzeugt, wie sie auch nur aus diesem Lichte besteht. Man sollte auch Resonanzlicht der Linie 20582 erwarten, da auch deren Licht eine starke Absorption im Gas erfährt. Doch ergaben dahingehende Versuche bisher kein Anzeichen davon. Die ohne Filter erzeugte Resonanzstrahlung wird z. B. durch das  $2\mu$ -Filter völlig absorbiert. Immerhin ist die Strahlungsenergie von  $2\mu$  bei der vertikalen Kapillaren von  $E$  nur gering, so daß noch günstigere Versuchsanordnungen zur Lösung dieser Frage heranzuziehen wären.

Nun besteht die Strahlung der Linie 10830 aus einer

starken Hauptlinie 10830,32 und einem schwächeren Begleiter 10829,11 int. Å.-E.<sup>1)</sup> Das Intensitätsverhältnis dieser beiden Linien ist für meine Emissions- und Resonanzröhre bei den benutzten Stromstärken dasselbe, wenn man senkrecht zur Kapillare beobachtet. Das in Längsrichtung die Röhren verlassende Licht passiert schwächer leuchtende, aber stark absorbierende Gasschichten und zeigt die Energie des Satelliten verstärkt, die der Hauptlinie abgeschwächt. Dies ist von Hrn. Ignatieff schon erwähnt. Aber seine Deutung auf Grund der Selbstabsorption ist den hier jetzt beschriebenen Versuchen entlehnt. Diese beiden Linien entsprechen den anderen Doppellinien des einen Seriensystems des Heliumspektrums und bilden dessen Grundglied. Bei mehreren von den übrigen Linien dieses Systems, besonders bei 5876, 4713, 4472, ist von Back und mir eine Verwandtschaft<sup>2)</sup> (Koppelung nach Voigt) zwischen der Hauptlinie und dem Begleiter gefunden. Denn die Zeeman-Effekte der beiden Komponenten stören sich gegenseitig und streben in hohem Felde einem einzigen normalen Triplet zu. Es fragt sich, wie die zwei Komponenten in dem absorbierten Licht und in dem Resonanzlicht auftreten. Dies habe ich zusammen mit Hrn. A. Ignatieff interferometrisch untersucht, auf dessen Arbeit<sup>3)</sup> bezüglich des Interferometers und der Methode (Thermosäule in zentraler Zone) verwiesen sei. Es zeigte sich, daß hauptsächlich die starke Komponente absorbiert wird. Das Satellitenlicht wird bedeutend weniger absorbiert und sollte wegen der geringeren Intensität des Satelliten im einfallenden Lichte daher ziemlich geschwächt im Resonanzlicht auftreten. Tatsächlich aber ist das Intensitätsverhältnis der beiden Linien in der Resonanzstrahlung wieder dasselbe wie in der Eigenstrahlung der Emissions- oder Resonanzröhre. Es muß also das absorbierte Licht der Hauptlinie im Resonator die differenten Schwingungen der schwachen Nebenlinie sekundär anregen. Dies ist eine andere Erscheinung, welche die Verwandtschaft der zwei Komponenten beweist. Analog sollte man erwarten, daß

1) Vgl. A. Ignatieff, Ann. d. Phys. 43. p. 1117. 1914.

2) F. Paschen und E. Back, Ann. d. Phys. 39. p. 916. 1912.

3) A. Ignatieff, Ann. d. Phys. 43. p. 1117. 1914.

das Licht der Linie  $D_3$  im Natriumdampfe eine Resonanzstrahlung erregt, die auch das Licht von  $D_1$  verstärkt.<sup>1)</sup>

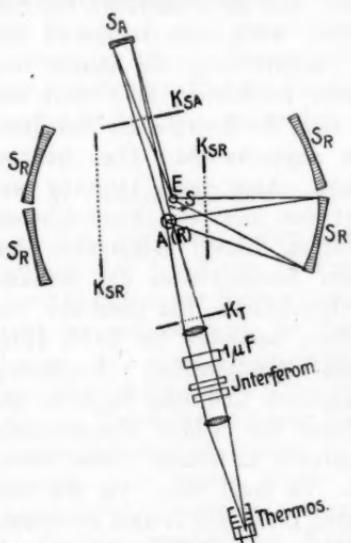


Fig. 4.

Fig. 4 (Röhren  $E$  und  $A$  zu groß gezeichnet!) Die Versuche wurden folgendermaßen ausgeführt.

1. *Absorption.* 1  $\mu$ -Filter eingeschaltet.  $K_{SA}$  geschlossen.  $K_T$  geöffnet. Eigenstrahlung  $J_A$  von  $A$  kompensiert.  $i_E = 0,072$  Amp.  $i_A = 0,0085$  Amp. Ausschlag durch Öffnung von  $K_{SA}$ . Anfangsintensität  $J_0$  bei unerregter Röhre  $A$ , hindurchgelassene Intensität  $J'$  bei erregter Röhre  $A$ . Kurven: Fig. 5.

2. *Resonanz.* 1  $\mu$ -Filter ausgeschaltet.  $K_{SA}$  geschlossen.  $K_T$  geöffnet. Eigenstrahlung  $J_A$  kompensiert.

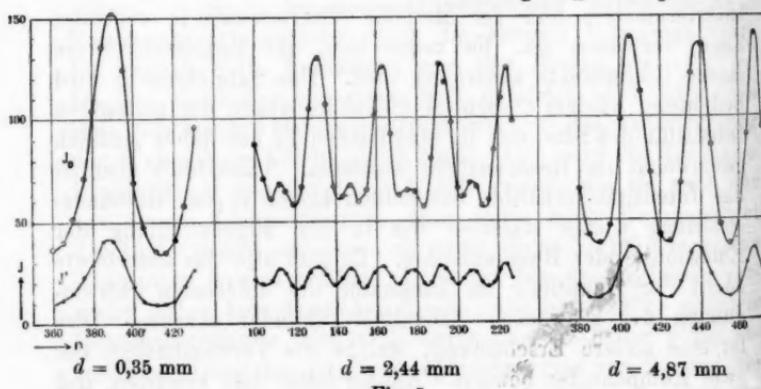


Fig. 5.

1) *Anm. bei d. Korrekt.* Man sollte dies trotz des entgegenstehenden Resultates von Wood und Dunoyer (Phil. Mag. June 1914, p. 1023) erwarten, aus welchem vorläufig wohl nur hervorgeht, daß die Miterregung der zweiten Dubletlinie bei größerer Schwingungsdifferenz des Dublets schwächer ist.

$i_E = 0,09$  Amp.  $i_R = 0,0085$  Amp. Ausschlag  $J_R$  durch gleichzeitiges Öffnen beider Schirme  $K_{SR}$ . Kurven: Fig. 6 unten  $\odot\odot$ .

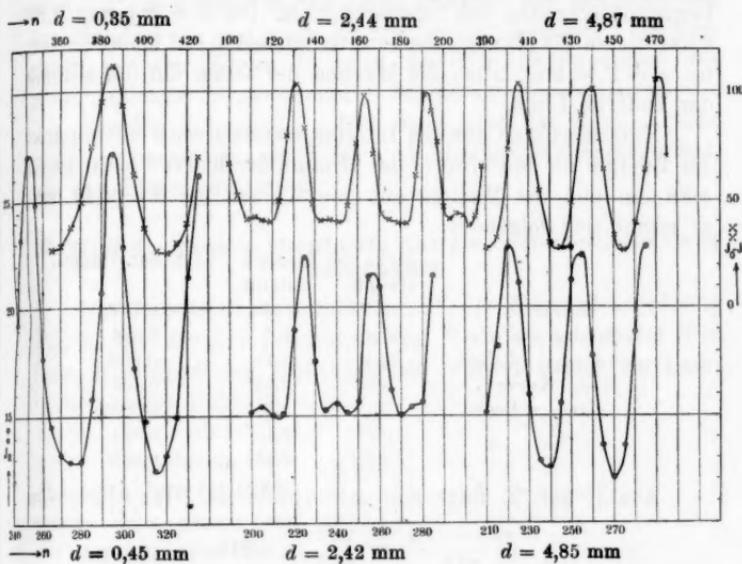


Fig. 6.

3. Resonanz und Eigenstrahlung von  $R$ . 1  $\mu$ -Filter eingeschaltet.  $i_E = 0,09$  Amp.  $i_R = 0,0085$  Amp. Für Resonanz wie 2. Für Eigenstrahlung  $J_A$  Öffnung und Schließung von  $K_T$ . Kurven: Fig. 7. Entsprechende Punkte beider Kurven bei gleicher Interferometerstellung unmittelbar hintereinander beobachtet.

Bei drei Entfernungen  $d$  der Interferometerplatten, nämlich bei  $d = 0,4$  mm, 2,44 mm, 4,88 mm sind Stücke der Inter-

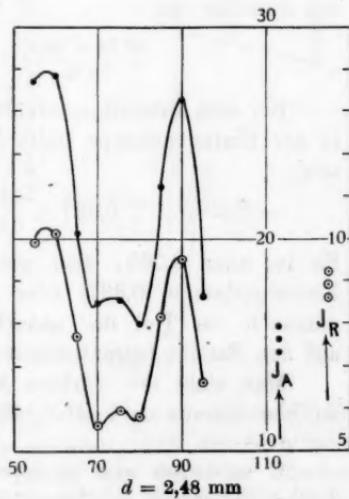


Fig. 7.

ferometerkurve (Thermosäule in zentraler Zone) beobachtet.<sup>1)</sup> Die Abszissen der Figur sind Einstellungen am Kopf der Feinbewegungsschraube des Interferometers. Bei  $d = 0,4$  und  $4,88$  koinzidieren die Maxima der Interferometerkurven beider Linien, bei  $d = 2,44$  mm fallen die Maxima der einen auf die Minima der anderen Linie.

Entnimmt man aus den Interferometerkurven als Nullpunkt der Energie die Mittelwerte der Minima der Kurven bei  $0,4$  und  $4,88$  mm und die Maxima aus den Kurven bei  $d = 2,44$  mm, so ergibt sich folgendes:

	Höhe der Maxima	Verh. Sat./Hauptl.
	Hauptl.	Satellit
1. Kurve $J_0$ . . .	89,8	30,25
2. " " $J'$ . . .	17,4	15,1
2a. " $J_0 - J'$ . . .	72,4	15,15
3. $J_R$ -Kurve . . .	9,55	2,95
andere Beob. . .	10,15	3,05
" " . . .	10,65	3,45
" " . . .	9,55	2,95

Aus 1. und 2. folgt eine Absorption der Hauptlinie von

$$\frac{89,8 - 17,4}{89,8} = \frac{72,4}{89,8} = 0,806,$$

des Satellits von

$$\frac{30,25 - 15,1}{30,25} = \frac{15,15}{30,25} = 0,501.$$

Bei dem Intensitätsverhältnis der beiden Linien von  $0,337$  in der Emissionslampe sollte im Resonanzlicht das Verhältnis sein:

$$0,337 \times \frac{0,501}{0,806} = 0,209.$$

Es ist aber  $0,309$ , also wieder nahe dasselbe wie in der Emissionslampe ( $0,337$ ) oder der Absorptionslampe. Es ist demnach ein Teil der absorbierten Energie der Hauptlinie auf den Satellit intraatomistisch übergegangen.

Man sieht die stärkere Absorption der Hauptlinie direkt an den Kurven  $J_0$  und  $J'$ , Fig. 5,  $d = 2,44$  mm. In Fig. 6,

1) Bei  $0,4$  mm wird der Schlitten nicht völlig mitgenommen. Dadurch erscheinen die Interferenzstreifen breiter auseinandergezogen, was für den vorliegenden Zweck gleichgültig war.

oben  $\dots$ , ist die Kurve  $J_0 - J'$  eingetragen. Ihr Vergleich mit  $J_0$ , Fig. 5 oben, zeigt die Abschwächung des Satellitenlichtes in  $J_0 - J'$ , dem absorbierteren Licht (Maxima der mittleren von den Minimas der seitlichen Kurven an zu rechnen!). Ihr Vergleich mit der Kurve  $J_R$  zeigt das Wiederhervortreten des Satellitenlichtes in gewöhnlicher Stärke im Resonanzlicht.

Aus Fig. 7 nach 3., p. 639, folgt, daß das Resonanzlicht genau so zusammengesetzt ist und dieselbe Wellenlänge hat, wie das Eigenlicht von  $R$ .

### III. Wird die gesamte absorbierte Energie in Resonanzstrahlung verwandelt?

Die Beantwortung geschah mit der Versuchsanordnung Fig. 8, bei der der Resonanzlampe  $R$  ein berechenbarer Teil ihrer Eigenstrahlung zurückgegeben wurde, indem sie exakt in sich selber abgebildet wurde. Die dadurch bewirkte Vermehrung ihrer Eigenstrahlung für 10830 wurde sehr genau mit der ursprünglichen Eigenstrahlung verglichen.

Die beiden besten Fenster der Resonanzröhre mit planen Wänden wurden als Beobachtungsfenster (1) und Beleuchtungsfenster (2) gewählt. Vor (1) war eine Blende von 2 cm Länge angebracht, welche die zusammengeblasenen Kanten abblendete, die bei der Beleuchtung infolge von Inhomogenitäten aufleuchteten. Die Blende ließ die klarsten Teile von (1) und (2) für das Experiment frei. Sie war so breit, daß der Lichtfaden im Inneren von  $R$  in ganzer Breite vom Orte der Thermosäule aus sichtbar war. Das Bild, welches der Spiegel  $S_T$

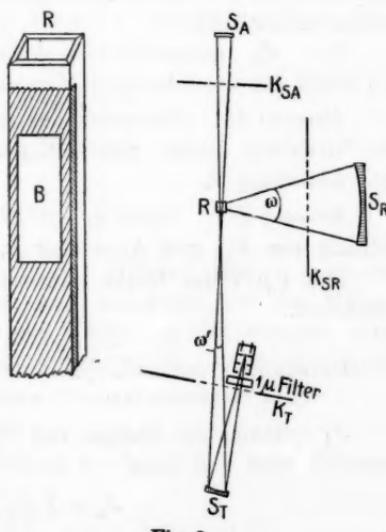


Fig. 8.

auf dem Spalt der Thermosäule entwarf, war so verkleinert, daß die Strahlung der vollen Breite und Länge des Lichtfadens in  $R$ , welche die Blende durchsetzte, zur Thermosäule gelangte. Nur die Mitte oder einen der Ränder des Lichtfadens auf den empfindlichen Teilen der Thermosäule abzubilden, wäre ein Fehler gewesen. Denn man mußte die gesamte Strahlung des in sich abgebildeten Volumens leuchtenden Gases messen. Der hinter der Blende befindliche Teil des Gases der Resonanzlampe unterlag also der Untersuchung. Er war sowohl durch  $S_R$  wie durch  $S_A$  exakt in sich selber abgebildet. Es war 1. seine Absorption für sein Eigenlicht, 2. seine Resonanz, hervorgerufen durch sein Eigenlicht, und 3. seine Eigenstrahlung  $J_A$  selber exakt meßbar.

*Messung I.*  $K_{SR}$  und  $K_{SA}$  geschlossen. Eigenstrahlung  $J_A$  von  $R$  durch 1  $\mu$ -Filter hindurch gemessen durch Öffnung von  $K_T$ : entweder als Galvanometerausschlag oder durch Kompressionswiderstände.

Der  $J_A$  entsprechende Ausschlag wird kompensiert.  $K_T$  bleibt für die folgenden Messungen offen.

*Messung II.* Absorption des leuchtenden Gases in  $R$  für die Strahlung 10830 seines Eigenlichtes: Öffnung von  $K_{SA}$  gibt Ausschlag  $Z$ .

*Messung III.* Resonanz für Eigenlicht.  $K_{SA}$  geschlossen. Öffnung von  $K_{SR}$  gibt Ausschlag  $R$ .

Das 1  $\mu$ -Filter bleibt während der drei Messungen eingeschaltet.

**Berechnung der Absorption des untersuchten Teiles  
der Resonanzlampe für sein eigenes Licht.**

$J_A$  bedeutet die Energie von  $R$ , welche in den Winkel  $\omega'$  gestrahlten wird und dann zur Beobachtung gelangt. Es ist

$$J_A = Ed\omega',$$

$E$  ursprüngliche Strahlung von  $R$  im Raumwinkel 1,  $d$  Durchlässigkeit der Quarzglaswand für 10830,  $\omega'$  der Raumwinkel, dessen Strahlung zur Thermosäule gelangt.

Der Ausschlag  $Z$  bedeutet die Größe:

$$rEd^3(1-a)\omega.$$

$rEd^2$  ist die vom Spiegel  $S_A$  (Reflexionsvermögen  $r$ ) nach  $R$  zurückgegebene Energie,  $1 - a$  die Durchlässigkeit der leuchtenden Gasschicht.

$d$  wurde besonders mit einem Stück Quarzglas gleicher Dicke und Beschaffenheit zu 0,9336 für 10830 bestimmt. Es folgt:

$$1 - a = \frac{Z}{r J_A d^2} .$$

**Verwertung des Ausschlages  $R$  in III.**

Wenn alles absorbierte Licht in Resonanzstrahlung verwandelt wird, so muß  $R/J_A$  folgende Größe haben: Die von  $S_R$  im Raumwinkel  $\omega$  erhaltene und nach  $R$  zurückgegebene Energie ist  $rEd\omega$ . Davon kommt ins Gas die Menge  $rEd^2\omega$ . Dort wird absorbiert die Menge  $rEd^2\omega a$ . Dies wird in den Raumwinkel  $4\pi$  gestrahlt. In den Winkel  $\omega'$  kommt der Teil  $\omega'/4\pi$  hiervon, also

$$rEd^2\omega a \frac{\omega'}{4\pi} = R .$$

Dies wird als Ausschlag  $R$  beobachtet.

$$\frac{R}{J_A} = r d^2 a \frac{\omega}{4\pi} .$$

Der Spiegel  $S_R$  von 22 cm Öffnung und  $\varrho = 41$  cm Krümmungsradius empfängt und reflektiert die im Raumwinkel  $\omega$  enthaltene Strahlung. Wenn  $\varphi$  der entsprechende ebene Winkel (in der Zeichnungsebene) ist, so ist die Größe der Spiegelfläche

$$2\pi\varrho^2 \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) .$$

Also

$$\omega = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\omega}{4\pi} = \sin^2 \frac{\varphi}{4} .$$

Für  $\sin \varphi/2 = 11/41$  folgt  $\sin^2 \varphi/4 = 0,01834$ . Dies nahm man als Wert  $\omega/4\pi$  an. Also

$$\frac{\omega}{4\pi} = 0,01834 .$$

## Beispiel.

Strom  $i_R$  in Resonanzlampe. 0,0053 A.

Einzelne Ausschläge eines Beobachtungssatzes.

$J_A$	$R$	$Z$	$J_A$	$R$	$R$	$J_A$
563,2	7,0	91,9	559,5	90,7	6,9	558,8
562,6	6,85	91,8	559,0	90,4	7,2	559,5
562,7	7,00	91,6	558,0	90,6	7,1	559,15
563,5	6,75		558,8		7,05	
M. 563,0	7,80		$Z = 91,1$	$J_A = 558,8$	7,2	
	7,80				6,65	
	7,03				7,02	

$$\frac{R}{J_A} = \frac{7,03}{563,0} = 0,01249.$$

$$\frac{R}{J_A} = \frac{7,02}{559,2} = 0,01256.$$

$1 - a = \frac{91,1}{558,8 \times 0,9336^6 \times 0,960} = 0,1946$ ,  $a = 0,8054$ ,  
 $r = 0,960$  nach Beobachtungen von mir<sup>1)</sup> für frisch ver-  
 silberten Glasspiegel.

Derartige Beobachtungssätze wurden mit verschiedenen Stellungen und Justierungen des Resonanzspiegels ausgeführt und ergaben für den Strom  $i_R = 0,0053$  folgende Resultate, die als gleichwertig angesehen sind.

Die weitere Tabelle enthält die Resultate, welche durch solche Beobachtungssätze für drei verschiedene Stromstärken  $i_R$  erhalten sind. Die mittlere Größe der gemessenen Werte  $R$  ist in der letzten Reihe angefügt.

Es mußte bei diesen Versuchen vermieden werden, daß von der Eigenstrahlung der Resonanzlampe ein bemerkbarer Teil direkt an der Resonanzröhre reflektiert wurde und dann zur Thermosäule gelangte. Dazu bildete man die andere (Emissions-)Röhre mit einer 20mal intensiveren Strahlung aus derselben Richtung auf der Resonanzröhre ab und gab dem Strahlenbündel beim Eintritt in die Resonanzröhre etwa die gleiche Breite, wie es bei der Abbildung der Resonanzröhre auf sich selber hatte. Nicht bei jeder Beleuchtungsrichtung war es möglich, die Reflexionen völlig zu vermeiden. Man benutzte nur solche Richtungen, aus denen die 20mal intensivere Strahlung Reflexionsausschläge von weniger als 0,5 mm erzeugte. Die Blende  $B$  aus berußtem Kupferschablonenblech

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 4. p. 805. 1901.

Alle Beobachtungen  
bei  $i_R = 0,0053$  A.

$R/J_A$	$a$
0,01233	
0,01245	
0,01222	
0,01228	
0,01198	
0,01256	0,8054
0,01249	
0,01315	0,8041
0,01292	
0,01205	0,8154
0,01191	0,8111
0,01342	0,8041
0,01297	
0,01271	

M. 0,01251 0,8080  
od.  $1,251 \pm 0,05$  Proz.  
für die angegebenen  
Werte und für  
 $a = 0,8080$  berechnet:  
 $r d^2 a \frac{\omega}{4 \pi} = 0,01240$ .

Mittelwerte bei verschiedenen Strömen  $i_R$ :

$$i_R = 0,00285 \quad 0,0053 \quad 0,0085$$

$$a = 0,8035 \quad 0,8080 \quad 0,8150$$

$R/J_A$ beob.	Proz.	$1,21 \pm 0,04$	$1,25 \pm 0,05$	$1,24 \pm 0,06$
" ber.		1,23	1,24	1,25
		$R = 3,0$	7,0	11,9

Da die berechneten Werte mit den beobachteten übereinstimmen, wird die gesamte absorbierte Energie als Resonanzenergie wiedererhalten.

beseitigte wirksam die Reflexionen von den Kanten. Bevor diese benutzt wurde, ergaben sich größere Wert für  $R/J_A$ , nämlich für

$$i_R = 0,0027 \quad 0,0052 \quad 0,0084$$

$$R/J_A = 1,42 \quad 1,35 \quad 1,39 \text{ Proz.}$$

Man untersuchte auch das in anderen Richtungen ausgestrahlte Resonanzlicht. Ein seitlich neben der Resonanzröhre aufgestellter Planspiegel fing das Licht auf, welches nach der Beleuchtungsseite ausgestrahlt wurde und sandte es mittels zweier weiterer Spiegel zur Thermosäule. Man fand dabei größere Werte des Verhältnisses  $R/J_A$ , nämlich Werte zwischen 1,5 und 1,8 Proz. Doch war es nicht möglich, hierbei Reflexionen zu umgehen, die den Wert stets vergrößern. Auch von der dem Resonanzspiegel gegenüberliegenden Seite fing man, wieder außerhalb des verlängerten, vom Spiegel  $S_R$  reflektierten Lichtkegels, mittels eines Spiegels Licht von der Resonanzlampe

auf und reflektierte es in die Thermosäule. Man fand  $R/J_A = 1,22$  Proz. resp. 1,17 Proz. für  $i_R = 0,0053$  resp. 0,0086. Doch war die Hinterwand der Resonanzlampe nicht völlig klar. Ferner hatte das leuchtende Gasvolum auf der Beleuchtungsseite eine größere Resonanzintensität. Das hier erzeugte Resonanzlicht hatte bei diesem Versuch die übrige leuchtende Gasschicht zu durchsetzen, wo es wiederum absorbiert wurde. Bei großer Schichtdicke würde daher an der Hinterseite kein Resonanzlicht mehr wahrzunehmen sein, und es wird aus diesem Grunde bei diesem Versuch die wahrgenommene Resonanzintensität zu klein, wegen der diffusen Reflexion der noch hindurchgelassenen Beleuchtungsstrahlung an den undurchsichtigen Stellen der Hinterwand aber zu groß gewesen sein.

Wegen der Undurchlässigkeit der Hinterwand sind die Resultate anderer Versuche nicht zu verwerten, bei denen noch ein zweiter, gleicher Resonanzspiegel dem ersten gegenübergestellt war, der von links die Resonanzlampe in sich selber abbildete, und der das durch das leuchtende Gas noch hindurchgelassene Licht des ersten Spiegels wieder zurückreflektierte. Erstens erzeugte der linke (IL) Spiegel für sich stets einen (etwa 7 Proz.) kleineren Resonanzausschlag als der rechte Spiegel, und zweitens ergaben beide Spiegel zusammenwirkend nicht 1,19 mal mehr als die Summe ihrer Einzelwirkungen, wie man unter Berücksichtigung der angegebenen Werte von  $d$ ,  $r$ ,  $a$  für die wiederholten Reflexionen und für  $i_R = 0,0053$  berechnet, sondern nur 1,13 mal mehr. Der Grund ist auch hier in der schlechten Beschaffenheit der linken Seitenplatte der Kapillaren zu suchen, deren Durchlässigkeit etwa 7 Proz. geringer ist, als die des ausgewählten Stückes der rechten.

Die angeführten Versuche zeigen, daß auch mit minderer Sorgfalt in der Auswahl der Versuchsbedingungen noch ziemlich genau die Größe der berechneten Eigenresonanz erhalten wird, und ferner, daß die Eigenresonanz auch nach anderen Richtungen als der schließlich gewählten senkrechten jedenfalls nahe von gleicher Größe ist. Dies steht damit in Einklang, daß die von der Emissionslampe erregte starke Resonanz nach allen Richtungen hin ungefähr von gleicher Größe ist. Nur auf der

Beleuchtungsseite (dem Resonanzspiegel zugekehrten Seite) war sie etwas stärker und auf der gegenüberliegenden Seite schwächer. Über einen Winkelraum von etwa  $100^\circ$  senkrecht zur Beleuchtungsrichtung war sie konstant, wenn man die gesamte Breite des leuchtenden Gasfadens von  $R$  auf der Thermosäule abbildete. Entwarf man ein vergrößertes Bild auf der Thermosäule, so gab die auf der Beleuchtungsseite befindliche Hälfte eine stärkere Resonanz als die andere Hälfte des leuchtenden Gasvolumens.

Aus den Versuchen folgt, daß das leuchtende Gas die absorbierte Energie ohne Verlust in den Raum hinausstrahlt. Diese Eigenschaft soll der Plancksche Resonator haben, und so dürfte hier ein Beispiel für einen solchen vorliegen. Die verschwundene Energie der Resonanz erregenden Strahlung geht also in Schwingungsenergie des Resonators und diese wieder ohne Verlust in Strahlung über. Danach ist es auch sehr wahrscheinlich, daß Eigenschwingungen dieses Resonators, welche auf andere Weise erregt werden, z. B. durch Stromenergie, ohne Verlust in Strahlung verwandelt werden. Das bedeutet, daß die Dämpfung der Resonator schwingungen nur durch die eigene Strahlung erfolgt. Dies wird durch die Wärmebewegung der leuchtenden Resonatoren nicht geändert und auch wohl nicht durch etwaige Zusammenstöße mit Molekülen oder Elektronen, die hier allerdings selten sein dürften. Im letzteren Falle wird zwar eine begonnene Schwingung abgebrochen. Doch braucht von der Energie dabei nichts in andere Formen überzugehen. Dagegen ist die entsprechende Spektrallinie 10830 Å.-E. wegen der Wärmebewegung nach Dopplers Prinzip etwa 1000 mal breiter als ohne diese sekundäre Dispersion der Frequenzen. Die einzelnen elementaren Wellenzüge, die nur noch durch Zusammenstöße verkürzt sein können, sind es, welche das Phänomen der Absorption hervorbringen. Denkt man die Wärmebewegung ausgeschaltet, so erhält man die 1000 mal schmälere und entsprechend intensivere Spektrallinie, deren Emissions- und Absorptionsintensität durch die Anzahl schwingender Resonatoren bedingt ist. Wollte man diese Anzahl aus dem Maximum der beobachteten breiten Absorptionslinie berechnen, so würde man eine zu kleine Zahl erhalten. Die aus der Halb-

breite der beobachteten Linie berechnete Dämpfung würde ferner in diesem Falle etwa 1000 mal zu groß werden und sie würde mit der tatsächlichen Dämpfung der Resonatorschwingungen in keiner Beziehung stehen.

Auch die Quecksilberresonatoren der Woodschen Resonanzstrahlung der Linie 2537 Å.-E. haben wahrscheinlich dieselbe Eigenschaft. Vor dem der photoelektrischen Zelle<sup>1)</sup> zugewandten (Beobachtungs-)Fenster und etwas seitlich von dem Beobachtungsstrahlengang wurden drei Metallspiegel aufgebaut, in deren Krümmungszentrum die Mitte der Woodschen Resonanzlampe sich befand. Die Eigenstrahlung der Resonanzlampe nahm dadurch um 6—8 auf 1400, also um 5 Promille tatsächlich zu. Nach der geometrischen Ausmessung der Anordnung hätte sie um 4,1 Promille zunehmen müssen. Wegen der Reflexionen an der Vorderseite und dem Quarzfenster und wegen der kleinen Spiegel war das Experiment nicht so exakt durchführbar, wie beim Helium. Es lohnte sich nicht, das Reflexionsvermögen der benutzten Spiegel (Spiegelmetall und Magnalium) genauer zu bestimmen, um das Resultat zu befestigen, welches ohnehin nach dem Heliumexperiment sehr wahrscheinlich ist und welches Wood auf Grund anderer Versuche ebenfalls für wahrscheinlich hält.<sup>2)</sup> Wir werden auch hier den Planckschen Resonator haben. Aber die beobachtbare Breite der Resonanzlinie ist durch die Wärmebewegung der gasförmigen Resonatoren nach Dopplers Prinzip gegeben und in diesem Falle etwa 20fach vergrößert. Man kann auch hier weder aus der beobachteten Halbbreite der Absorption auf die Dämpfung der Resonatoren, noch aus dem Absorptionsbetrag im Zentrum der beobachteten Linie<sup>3)</sup> auf die Anzahl Resonatoren schließen.

1) Vgl. A. v. Malinowski, Physik. Zeitschr. 14. p. 884. 1914 und F. Paschen u. W. Gerlach, Physik. Zeitschr. 15. p. 489. 1914, obiger Versuch von Hrn. Gerlach ausgeführt.

2) *Anm. bei d. Korrekt.* Dasselbe zeigen L. Dunoyer und R. W. Wood (Phil. Mag. 27. June 1914, p. 1030) für die von Dunoyer gefundene Oberflächenresonanz des Natriumdampfes (Journ. de Phys. Janvier 1914, p. 17) durch ein einfaches und sehr überzeugendes Experiment.

3) *Anm. bei d. Korrekt.* Der Schluß A. v. Malinowskis (Ann. d. Phys. 44. p. 961. 1914) ist dem entsprechend zu korrigieren.

## IV. Die Temperatur der Heliumlinie 10830 Å.-E.

Da nur Licht von dem Spektralgebiete, welches die Heliumlinie 10830 umfaßt, Resonanz erregend wirkt, und da die erregte Resonanzenergie proportional der erregenden Energie ist, kann man die Strahlung eines schwarzen Körpers für das Spektralgebiet der Linie 10830 Å.-E. mit der einer Heliumröhre vergleichen, indem man die Resonanzstrahlungen vergleicht, welche beide erregen. Aus der Temperatur des schwarzen Körpers und dem beobachteten Intensitätsverhältnis

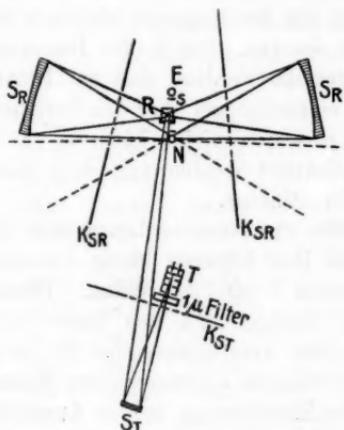


Fig. 9.

ergibt sich nach Plancks Strahlungsformel die Temperatur der monochromatischen Heliumstrahlung, d. h. die Temperatur des schwarzen Körpers, der in dem gleichen Spektralgebiete die gleiche Energie ausstrahlt. Obwohl man hierbei nur eine untere Grenze für diese Temperatur erhält, ist diese doch unerwartet hoch.

*Versuchsanordnung*, vgl. Fig. 9. Man nahm einen Nernststift  $N^1$ ) (frei schwebend ohne elektrische Zündvorrichtung), dessen schwarze Temperatur für seine Strahlung von  $1 \mu$  Wellenlänge genügend genau bekannt ist. Obwohl das  $1 \mu$ -Filter hierbei dauernd vor der Thermosäule stand, war die Strahlung

1) Die Schirme  $s$  schützen  $R$  vor dem Licht von  $N$  und  $E$ .

des Nernststiftes so stark, daß die Versuche mit zylindrischen Resonanzröhren wegen des großen Betrages an reflektierter Strahlung unmöglich waren. Erst die in Abschnitt III beschriebene Röhre mit vier planen Wänden reduzierte den Reflexionsausschlag auf 30—50 mm.

Dagegen war die Resonanz, welche das Nernstlicht erregte, so schwach, daß man zwei Resonanzspiegel von zwei Seiten senkrecht zur Beobachtungsrichtung verwenden mußte, um sie sicher wahrnehmen zu können. Mehr Spiegel ließen sich nicht so aufstellen, daß entweder die Geißlerröhre oder der Nernststift durch die Seitenfenster hindurch in der Resonanzröhre abgebildet wurden. Die beiden Resonanzspiegel mußten nämlich so aufgestellt werden, daß das Licht der Resonanzlampe nicht von einem Spiegel über den Nernststift zum anderen gelangte. Denn es würde solches Licht wieder in die Resonanzlampe hinein reflektiert werden und dort mehr Resonanz erregen als die Nernstlampe.

Man belastete die Resonanzlampe mit einem Strome  $i_R$  und kompensierte ihre Eigenstrahlung. Durch Aufziehen der Schirme  $K_{SR}$  entstand ein Ausschlag. Dieser wurde genau ermittelt. Dann löschte man den Strom in der Resonanzlampe, schaltete den kompensierenden Strom aus und gewann beim Öffnen der Schirme abermals einen Ausschlag, der etwas kleiner war. Der Hauptbetrag beider Ausschläge ist Energie, die an den Wänden der Resonanzröhre reflektiert ist. Die Differenz beider Ausschläge ist zum größten Teile der gesuchte Resonanzausschlag. Diese Ausschläge, auf deren Differenz es ankam, wurden durch alternierende Beobachtungen exakt festgelegt. Nicht zu vermeiden war eine schwache Resonanz infolge diffuser Reflexion von Resonanzlampenlicht am Nernststift. Denn so, wie der Stift auf dem leuchtenden Gas der Resonanzlampe, war auch letzteres auf dem Nernststift abgebildet und wurde an ihm diffus reflektiert. Um diesen Resonanzbetrag zu eliminieren, mußten die Beobachtungen bei verschiedenen Stromstärken  $i_R$  und entsprechenden Eigenstrahlungen  $J_A$  der Resonanzlampe gemacht werden. Den Verlauf der gesuchten Resonanz kannte man aus der Resonanz auf Geißlerröhrenlicht für dieselben Ströme  $i_R$ . Den Verlauf der Resonanz auf diffundiertes Eigenlicht, der mit  $i_R$  in ganz

anderer Weise variierte, konnte man berechnen, wenn die Eigenstrahlung  $J_A$  bekannt war. Diese, sowie der Resonanz-ausschlag, für eine Emissionslampe bestimmter Belastung  $i_E$  war für einen bestimmten Strom  $i_R$  der Resonanzlampe bei diesen Versuchen immer dieselbe und wurde vorher und nachher ermittelt. Der Gasdruck in  $R$  war stets 5 mm.

### Beispiel.

Beobachtungssatz mit Einzelausschlägen.

$i_R = 0,0028$  Amp.  $R_0$  Ausschlag ohne Strom in  $R$ .  
 $R_i$  Ausschlag mit Strom in  $R$ .

$R_0$	$R_i$	$R_0$	$R_i$	$R_0$		
50,4	49,95	49,65	50,20	49,85		
49,9	50,05	49,70	50,85	49,60	Mittelwerte	
49,7	50,2	50,00	50,45	49,55	$R_i$	$R_0$
49,8	50,25	49,65	50,20	49,10	50,21	49,75
49,4	50,8	49,65	50,15	49,70	50,115	49,60
49,8	50,55	49,65	50,00	49,60		
49,5	50,25	49,50	50,05	49,25		
49,6	50,05	49,50	49,80	49,45	50,163	49,597
49,65	50,15	49,20	49,80	49,30	$\Delta = (R_i - R_0) = 0,566$ mm	
Mi 49,75	50,1	49,55	49,65	49,35		
	50,5	49,60	50,115	49,35		
	50,21			49,15		
				49,44		

Mehrere derartige Beobachtungssätze bei demselben Strom unter veränderter Spiegeljustierung ergaben als Differenzen:

0,620, 0,566, 0,570, 0,445, 0,462, im Mittel 0,53.

In der folgenden Zusammenstellung bedeutet  $i_R$  den Strom in der Resonanzlampe,  $J_R$  den Resonanzausschlag, den eine mit 0,047 Amp. belastete Emissions-Heliumröhre hervorrief, die in gleicher Weise wie der Nernststift auf der Resonanzlampe abgebildet wurde.  $J_A$  die eigene Strahlung der Resonanzlampe, die für den Versuch kompensiert war.  $\Delta$  die Differenz, ermittelt wie im obigen Beispiele als Differenz  $R_i - R_0$  der Ausschläge mit und ohne Erregung der Resonanzröhre.

Die Zahlen sind, wie im Beispiele Mittel mehrerer Beobachtungssätze, und ihre Genauigkeit ist dieselbe wie im Beispiele. Nur die erste Ziffer (Zehntelmillimeter des Skalausschlages) dürfte sicher sein. Dies dürfte für die unternommene Schätzung genügen. Die berechneten Werte  $\Delta$ , welche aus der nachfolgenden Diskussion gewonnen sind, weichen um nicht mehr als die möglichen Fehler von den beobachteten ab.

Resultate: Nernststiftresonanz.

$i_R$	0,00055	0,0009	0,0028	0,0053	0,0088	0,0133
$J_R$ <sup>1)</sup>	84	102	128,5	137	137	137
$J_A$	88,85	137	305,6	574,9	1106	1734
$\Delta$	{ beob. 0,32	0,49	0,58	0,61	0,64	0,76
	{ ber. 0,345	0,422	0,548	0,599	0,639	0,687
$\alpha \cdot J_R$	0,841	0,414	0,521	0,556	0,556	0,556

Der durch die Nernstlampe erzeugte Resonanzausschlag besteht aus zwei Teilen: Erstens aus richtiger Resonanz auf das Licht des Nernststiftes. Da dieser konstant brannte, war seine Energie in dem Spektralgebiet der Linie immer dieselbe. Diese Energie erzeugte daher eine Resonanz, welche sich ebenso mit  $i_R$  ändern mußte, wie die Resonanz auf konstantes Heliumlicht derselben Wellenlänge, also wie  $J_R$ . Dieser Teil ist daher proportional mit  $J_R$  und gleich  $\alpha \cdot J_R$ . Der zweite Teil des beobachteten Resonanzausschlages röhrt wie oben erwähnt von diffundiertem Resonanzröhrenlicht her und ist proportional dem absorbierten Teil von diesem. Da der absorbierte Betrag proportional  $J_R$  zu setzen ist, kann der zweite Teil angesetzt werden zu:

$$\beta J_A \frac{J_R}{J_{R\infty}}.$$

$J_{R\infty}$  die Resonanz auf die Heliumstrahlung bei großer Strombelastung  $i_R$  der Resonanzröhre ist im Beispiel als 137 anzusetzen. Es ist:

$$\Delta = \alpha J_R + \beta J_A \frac{J_R}{J_{R\infty}}.$$

1) Für  $i_R = 0,047$  Amp.

Für  $i_R = 0,00055$  sollte hiernach z. B. sein

$$0,32 = \alpha \times 84 + \beta 83,85 \frac{84}{137}.$$

Die berechneten Werte  $\Delta$  der obigen Tabelle entsprechen den Werten:

$$\alpha = 4,06 \times 10^{-3}, \quad \beta = 7,56 \times 10^{-5}.$$

Die letzte Reihe der Tabelle führt die berechneten Werte  $\alpha \cdot J_R$ . Dieser Betrag entspricht also der gesuchten Nernstlichtresonanz. Ein Vergleich desselben mit den beobachteten Werten  $\Delta$  zeigt, ebenso wie die relative Größe der Werte  $\alpha$  und  $\beta$ , daß bei weitem der größte Betrag der beobachteten Resonanz durch das Nernstlicht entstanden ist. Nur bei dem höchsten Strom  $i_R = 0,0133$ , bei dem die Eigenstrahlung  $J_A$  sehr bedeutend ist, wäre etwa  $\frac{1}{4}$  der beobachteten Resonanz diffuser Reflexion des Eigenlichtes  $J_A$  zuzuschreiben.

Der Wert  $\alpha = 4,06 \times 10^{-3}$  bedeutet, daß die Nernstlampe in dem Gebiete der Linie 10830 rund  $\frac{1}{1000}$  oder 250 mal geringere Intensität hat, als die Geißlerröhre, welche obige Resonanzausschläge  $J_R$  hervorrief. Die Geißlerröhre ist hierbei mit 0,047 Amp. belastet. Bei anderen Belastungen erregte sie an der konstant mit 0,0053 Amp. belasteten Resonanzlampe folgende Resonanzausschläge ( $\frac{\text{vorher}}{\text{nachher}}$  bedeutet: gemessen  $\frac{\text{vor}}{\text{nach}}$  den Versuchen mit der Nernstlampe). Die Ausschläge sind bei derselben Anordnung (vgl. Fig. 9) der Spiegel und auch mit eingeschaltetem  $1 \mu$ -Filter gewonnen.

$$i_R = 0,0053 \text{ Amp. Werte } J_R.$$

$i_R =$	0,0001	0,0055	0,012	0,023	0,047	0,072	0,092
$J_R$	{ vorher	32,5		96,7	137,0	161,5	174
	{ nachher	0,8	31,6	58,0	97,0	137,0	160,5

Es war möglich, mit Strömen von ungefähr 0,2 Amp. in der Emissionsröhre unter obigen Verhältnissen einen Resonanzausschlag von 200 mm zu erzeugen. In diesem Falle würde dann das Intensitätsverhältnis der Linie 10830 der Nernstlampe zur Geißlerröhre

$$1:250 \times \frac{200}{137} = 1:365 \text{ sein.}$$

Die Größen der Bilder des Nernststiftes und der Emissions-Geißlerröhre waren etwas verschieden. Die Breite war in beiden Fällen ungefähr dieselbe (1,5 mm). Die Länge war: Nernststift gleichmäßig hell auf 14,5 mm. Die Kapillare der Geißlerröhre war länger als die Blende *B* vor dem Beobachtungsfenster, so daß die Länge dieser Blende von 20 mm als Länge zu nehmen war. Die Reduktion des Intensitätsverhältnisses auf gleiche Bildgröße ergibt:

$$\text{für den Strom } i_E = 0,047 \text{ } (J_E = 137) \text{ } 1:250 \frac{14,5}{20} = 1:181,2,$$

$$\text{für den Strom } i_E = 0,2 \text{ } (J_E = 200) \text{ } 1:365 \frac{14,5}{20} = 1:264,7.$$

Schließlich kommt in Betracht, daß die Energieverteilung der Strahlung der Geißlerröhre in dem fraglichen Gebiete eine stark diskontinuierliche ist, während die Strahlung der Nernstlampe hier als konstant anzusehen ist. Wenn wir hierauf keine Rücksicht nehmen, so entspricht die berechnete Temperatur der Linie dem tatsächlich vorliegenden Lichte der Heliumlinie. Sie ist eine mittlere. Das Zentrum der Linie entspricht dann sicher einer höheren Temperatur als der berechneten; die Ränder natürlich einer niederen.

Bei mittlerer Belastung, wie sie hier zur Erhaltung der Konstanz benutzt ist (der für 95 Volt bestimmte Stift wurde mit 90 Volt und 0,6 Amp., also 54 Watt belastet), strahlt nun ein Nernststift in der Nähe von  $1 \mu$  nach vorliegenden Energiemessungen<sup>1)</sup> wie ein schwarzer Körper von etwa  $2000^0$  abs.

Nach Plancks Formel ist

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{e^{\frac{c_2}{\lambda T_2}} - 1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T_1}} - 1} \text{ also } \frac{J_1}{J_2} \left( e^{\frac{c_2}{\lambda T_1}} - 1 \right) + 1 = e^{\frac{c_2}{\lambda T_1}}.$$

1) W. W. Coblentz, Bull. of the Bureau of Standards 4. Nr. 4. p. 533.

Mit  $c_2 = 14500$ ,  $\lambda = 1,083 \mu$ ,  $T_1 = 2000^\circ$  abs. erhält man

für  $J_1/J_2 = 1:181$   $T_2 = 7890^\circ$  abs.,

„  $J_1/J_2 = 1:265$   $T_2 = 9580^\circ$  „ <sup>1)</sup>

Diese Temperaturen des mittleren und maximalen Leuchztzustandes meiner Röhre  $E$  sind also untere Grenzen der Temperatur ihrer Strahlung von  $10830 \text{ \AA.-E.}$   $i_E = 0,0001 \text{ Amp.}$  etwa erzeugt bei  $i_E = 0,0053 \text{ Amp.}$  denselben Resonanzausschlag wie die Nernstlampe ( $0,56 \times \frac{20}{14} = 0,8 \text{ mm}$ ). Dies ist daher eine obere Grenze der Belastung, unterhalb derer die Linie des Gases im Spektrum des Nernstbrenners als Absorptionslinie erscheinen würde. Mit Berücksichtigung der Energieverteilung wäre die Hälfte dieser Belastung eine obere Grenze.

Die hier bestimmten Temperaturen entsprechen nach dem Ergebnis von Abschnitt III der Energie der elementaren Wellenzüge, welche von der Gesamtheit vorhandener Resonatoren ausgestrahlt werden. Die mit Spektralanordnungen beobachtbare Breite der Linie, welche durch die Bewegung der Resonatoren, also durch Dispersion der Frequenzen nach Dopplers Prinzip zustande gekommen ist, entspricht nach Buisson und Fabry<sup>2)</sup> der Temperatur der Wärmebewegung der Resonatoren. Diese ist im Falle meiner Helium-Geißlerröhren etwas höher als die Zimmertemperatur, nämlich bei  $i_E = 0,047 \text{ Amp.}$  etwa  $190^\circ \text{ C.}$ , bei  $i_E = 0,2 \text{ Amp.}$  etwa  $350^\circ \text{ C.}$  (mit Thermoelementen gemessene Temperaturen der Kapillarenwände).

#### Zusammenfassung des Inhalts.

1. Helium, in der Geißlerröhre durch schwachen Strom erregt, absorbiert die Strahlung von  $10830$  und  $20582 \text{ \AA.-E.}$  und zeigt Resonanz für  $10830$ . Die Änderung der Absorption und Resonanz mit der Stromstärke wird angegeben und auf eine Deutung hingewiesen.

2. Die Wellenlänge des absorbierten und des in Resonanz verwandelten Lichtes wird interferometrisch untersucht. Dabei

1) Mit Berücksichtigung der Energieverteilung folgt für das Zentrum der Linie  $J_1/J_2 < 1:530$  und  $T_2 > 14500^\circ$  abs.

2) H. Buisson u. Ch. Fabry, Journal de Physique. Juni 1912.

tritt ein neues Phänomen auf, welches die Verwandtschaft der zwei Linien, aus denen 10830 besteht, beweist.

3. Durch eine einfache Versuchsanordnung wird bewiesen, daß alles absorbierte Licht als Resonanzlicht wieder auftritt, daß also der Heliumresonator die Eigenschaft des von Planck theoretisch eingeführten elektrischen Resonators hat.

4. Es wird aus der Resonanz des Heliums auf das Licht der Nernstlampe eine untere Grenze für die Temperatur der Heliumstrahlung 10830 Å.-E. gewonnen, die 7900—9600° abs. beträgt je nach der Strombelastung der verglichenen Heliumröhre.

(Eingegangen 9. Juni 1914.)

---

2. Die Wellenbewegung um eine transversal schwingende Saite in unbegrenzter Flüssigkeit;  
von A. Kalähne.

Bezeichnungen:

$x, y, z$  Cartesische Koordinaten,  $r, \vartheta, z$  Zylinderkoordinaten

$\varphi$  Geschwindigkeitspotential

$u$  (Komponenten  $u_r, u_\vartheta, u_z$ ) Geschwindigkeit } der Flüssigkeitsteilchen  
 $u$  (Komponenten  $u_r, u_\vartheta, u_z$ ) Verrückung }

$\varrho$  und  $p$  momentaner Dichte- und Druckwert

$\bar{\varrho}$  und  $\bar{p}$  Dichte und Druck im Ruhezustand

$s$  Verdichtung (Kompression)

$C$  Geschwindigkeit der Transversalwellen auf der Saite

$c$  Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit

$n = k c$  Kreisfrequenz

$N = \frac{k c}{2 \pi} = \frac{n}{2 \pi}$  sekundliche Frequenz } einer Schwingung

$T = \frac{1}{N} = \frac{2 \pi}{n}$  Periode }

$\lambda = \frac{2 \pi}{k}$  Wellenlänge in der Flüssigkeit

$l$  halbe Wellenlänge der Grundschwingung auf der Saite

$\gamma$  Verhältnis der spezifischen Wärmen  $c_p$  und  $c_v$  bei Gasen

$m$  und  $p$  Ordnungszahlen (Parameter)

$Z_m(\xi)$  Zylinderfunktion  $m^{\text{ter}}$  Ordnung (allgemeine Bezeichnung)

$J_m(\xi), N_m(\xi), H_m(\xi)$  Besselsche, Neumannsche und Hankelsche Zylinderfunktionen

$$x = \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}}, \quad x' = \sqrt{\frac{p^2 \pi^2}{l^2} - k^2} = i x.$$

Bei Doppelvorzeichen oberes für einlaufende, unteres für auslaufende Welle.

I. Problemstellung.

Ansatz und Integration der Differentialgleichung der Bewegung.

§ 1. Problem.

In einer früheren Abhandlung<sup>1)</sup> habe ich auf die Möglichkeit hingewiesen, die Bewegung der Gasteilchen in der Um-

1) A. Kalähne, Über die Änderung der Schwingungszahl tönender Körper in Gasen. Ann. d. Phys. 45. p. 321. 1914.

gebung der dort benutzten transversal schwingenden Stäbe bzw. Hohlzylinder analytisch zu behandeln, indem man sich statt eines einzelnen Stabes eine unendliche Anzahl gleicher, in gleicher Form und Phase schwingender Stäbe dachte, die auf einer geraden Achse angeordnet sind und sich gewissermaßen zu einem unendlich langen Stabe zusammenschließen. Das ist freilich eine Annahme, die nur eine Annäherung an die wirklich vorhandenen Verhältnisse geben kann. Den durch die Hinzufügung der übrigen, sich seitlich anschließenden Stäbe wird die Ausbreitung der Bewegung in Richtung der Achse, die von einem einzelnen Stabe — wenn auch in geringem Betrage — ausgeht, natürlich ganz verhindert. Dadurch wird aber auch die Bewegung senkrecht zur Achse beeinflußt, also die gesamte Strahlung verändert. Der Unterschied wird jedoch um so kleiner, je länger der Stab im Verhältnis zu seiner Dicke und je größer die Anzahl der Abteilungen ist, in denen er schwingt, wenn man nur die Umgebung der Mittel ebene betrachtet, d. h. derjenigen Ebene, welche senkrecht zur Stabachse durch die Stabmitte gelegt werden kann.<sup>1)</sup>

Mit wachsender Zahl der Abteilungen, also wachsender Ordnungszahl der Eigenschwingungen, wird die Schwingungszahl des Stabes, wenigstens in den mittleren Teilen, derjenigen der Saite immer ähnlicher, d. h. der Knotenabstand wird nahezu konstant, die schwingenden Abteilungen haben annähernd gleiche Länge und die Schwingungsfigur nähert sich immer mehr der Form einer Sinuslinie. Man kann daher für den Fall eines in zahlreichen Abteilungen schwingenden Stabes als Näherung einfach den Fall einer ebenso schwingenden Saite setzen, wodurch die analytische Behandlung ermöglicht wird. Diese schließt sich an die von Stokes<sup>2)</sup> gegebene Behandlung des Falles einer unendlich langen, als Ganzes transversal schwingenden Saite an; ihre Grundzüge findet man u. a.

1) Man kann die seitliche Strahlung ganz verhindern, indem man den Raum durch zwei zu dem Stabe bzw. der Saite senkrechte, unendlich ausgedehnte Ebenen in den Endpunkten desselben begrenzt; dadurch werden die Bedingungen der Rechnung streng verwirklicht.

2) G. G. Stokes, Math. and Phys. Papers 4. p. 299; Phil. Trans. Roy. Soc. 158. 1868, 18. Juni.

bei Lord Rayleigh<sup>1)</sup> skizziert. Es wird sich zeigen, daß unter gewissen Umständen im stationären Zustand keine Energieabgabe von der Saite bzw. dem Stab an das umgebende Medium stattfindet oder, anders ausgedrückt, daß dabei keine Strahlung von der schwingenden Saite ausgeht. In diesem Falle läßt sich auch die gemeinschaftliche Bewegung der Saite und des Mediums streng behandeln. In dem anderen, ebenfalls möglichen Falle, bei dem Ausstrahlung vorhanden ist, kann man die Behandlung nur unter Vernachlässigung der durch die Strahlung verursachten Dämpfung durchführen.

In der vorliegenden Arbeit soll zunächst die Schallbewegung in der Umgebung einer unendlich langen, in Abteilungen schwingenden Saite und die Energieströmung daselbst behandelt werden.

### § 2. Integration

der Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential.

Die Bewegung des Mediums, das wir als Flüssigkeit im allgemeinsten Sinne bezeichnen wollen, wird in bekannter Weise durch das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  dargestellt. Die Differentialgleichung der Schwingungsbewegung ist

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi,$$

wo  $c$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung in der Flüssigkeit (Schallgeschwindigkeit) ist.

Aus  $\varphi$  erhält man die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen als

$$(2) \quad u = \text{grad } \varphi,$$

also die Geschwindigkeitskomponente in irgendeiner Richtung  $\nu$

$$(2a) \quad u_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}.$$

Wir führen rechtshändige Zylinderkoordinaten  $r, \vartheta, z$  ein ( $r$  senkrechter Abstand von der Zylinderachse,  $\vartheta$  Azimut,  $z$  auf der Zylinderachse gemessene Entfernung von dem auf dieser

1) Lord Rayleigh, Theory of Sound II. § 339 ff.

Achse liegenden Koordinatenursprung) und nehmen  $\varphi$  proportional einer Sinus- bzw. Kosinusfunktion der Zeit  $t$  an, indem wir in komplexer Form ansetzen

$$(3) \quad \varphi = \psi(r, \vartheta, z) \cdot e^{\pm i k z t} = \psi(r, \vartheta, z) \cdot e^{\pm i \omega t}.$$

Die „Normalfunktion“  $\psi$  hängt nicht von  $t$  ab. Durch Einsetzen von (2) in (1) erhält man nach Abwerfen des Faktors  $e^{\pm i k z t}$

$$(4) \quad -k^2 \psi = \Delta \psi.$$

Da

$$(5) \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

ist, so geht (4) über in

$$(4a) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0.$$

Nun ist nach unseren Annahmen die Bewegung der Saite, also auch diejenige der Flüssigkeit längs der  $z$ -Richtung periodisch. Die räumliche Periode sei  $l$ ; dies ist die Halbwellenlänge der Grundschwingung auf der Saite. Wegen dieser Periodizität kann man  $\psi$  in eine nach Vielfachen des Argumentes  $\pi z/l$  fortschreitende Fourierreihe entwickeln. Wir setzen

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_p + \dots \\ = H_0 + H_1 \cos \frac{\pi z}{l} + H_2 \cos \frac{2\pi z}{l} + \dots + H_p \cos \frac{p\pi z}{l} + \dots \end{array} \right.$$

wo  $p = 0, 1, 2, \dots$  sein kann. Die Größen  $H_p$  sind Funktionen von  $p, r, \vartheta$ , aber nicht von  $z$ .

Der Ansatz (6), in dem nur Kosinusglieder vorkommen, ist brauchbar, wenn der Koordinatenanfangspunkt  $z = 0$  in die Mitte einer schwingenden Abteilung von der Länge  $l$ , bzw. in die Mitte der ganzen Saite gelegt wird; denn er allein erfüllt die dann stattfindende Bedingung, daß in der Mittelebene ( $z = 0$ ) keine Bewegung in der  $z$ -Richtung vorhanden sein darf, also  $u_z = 0$  sein muß, wie aus Symmetriegründen erforderlich ist.

Soll, wie weiterhin angenommen werden muß, auch in den zur Achse senkrechten Ebenen  $z = l/2, z = 2l/2, z = 3l/2$  usw.

und  $z = -l/2, z = -2l/2$  usw.  $u_z = 0$  sein, so müssen die Funktionen  $H$  mit ungeradem Index verschwinden. Für die Rechnung kommt diese Einschränkung vorläufig nicht in Betracht.

Jede der Teilstücke  $\psi_0, \psi_1 \dots$  muß die Gleichung (4 a) befriedigen; daher ergibt sich für jede der Funktionen  $H_p$  die Gleichung

$$(7) \quad \frac{\partial^2 H_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_p}{\partial \vartheta^2} + \left( k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2} \right) H_p = 0.$$

Zerspaltung von  $H_p$  in ein Produkt

$$(8) \quad H_p = R \cdot \Theta,$$

wo  $R$  nur von  $r$ ,  $\Theta$  nur von  $\vartheta$  abhängt, führt Gleichung (7) über in die Form

$$\Theta \frac{d^2 R}{d r^2} + \Theta \frac{1}{r} \frac{d R}{d r} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d \vartheta^2} + \left( k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2} \right) R \Theta = 0,$$

aus der durch Zerlegung folgt

$$(9) \quad \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{r}{R} \frac{d R}{d r} + r^2 \left( k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2} \right) = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d \vartheta^2}.$$

Da die linke Seite nur von  $r$ , die rechte nur von  $\vartheta$  abhängen darf, so müssen beide, wenn sie dauernd einander gleich sein sollen, einen und denselben konstanten Wert haben, den wir  $m^2$  nennen wollen;  $m$  wird eine Ordnungszahl (Parameter) der Funktionen  $R$  und  $\Theta$ . Durch Einführung derselben erhält man aus (9) die beiden Gleichungen

$$(10) \quad \frac{d^2 \Theta}{d \vartheta^2} + m^2 \Theta = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(11) \quad \Theta = A_m \cos m \vartheta + B_m \sin m \vartheta;$$

und

$$(12) \quad \frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d R}{d r} + \left( k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0$$

oder umgeformt

$$(12a) \quad \frac{d^2 R}{d(xr)^2} + \frac{1}{xr} \frac{d R}{d(xr)} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2 r^2} \right) R = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(13) \quad R = \mathfrak{A}_m Z_m^{(1)}(\kappa r) + \mathfrak{B}_m Z_m^{(2)}(\kappa r),$$

wo

$$(14) \quad \kappa = \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}}$$

ist, und  $Z^{(1)}$  und  $Z^{(2)}$  irgend zwei voneinander unabhängige Zylinderfunktionen (Besselsche, Neumannsche, Hankelsche Funktionen) darstellen. Die Lösung (13) gilt, gleichviel ob  $\kappa$  reell oder imaginär, also  $k >$  oder  $< p\pi/l$  ist. Nur für den Übergangsfall  $\kappa = 0$ , also  $k = p\pi/l$  muß sie durch eine andere ersetzt werden. In diesem Falle, also wenn

$$(15) \quad k = \frac{p\pi}{l}, \quad \text{d. h.} \quad \kappa = 0$$

ist, nimmt die Differentialgleichung (12) die Form an

$$(16) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$(17) \quad R = a r^m + b r^{-m}, \quad \text{wenn} \quad m \neq 0,$$

dagegen

$$(18) \quad R = a' \log r + b', \quad \text{wenn} \quad m = 0.$$

Aus den speziellen Bedingungen des Problems ergibt sich dann weiter, ob beide in dem allgemeinen Integral enthaltene Partikularintegrale zu benutzen sind, oder ob eins von ihnen wegzulassen, d. h. mit dem Faktor Null zu versehen ist. Das gilt sowohl für  $\Theta$  als auch für  $R$ . Durch Multiplikation der so gewonnenen Funktionen  $\Theta$  und  $R$  erhält man je eine der Funktionen  $H_p$ , und damit je eins der Glieder  $\psi_p$  in der Entwicklung (6), woraus durch Multiplikation mit  $e^{\pm ikx}$  das entsprechende Teilglied des Geschwindigkeitspotentials  $\varphi$  folgt. Da jedes dieser Glieder durch ein bestimmtes Wertepaar  $p$  und  $m$  gekennzeichnet ist, so soll ein solches Glied als  $\varphi_{pm}$  bezeichnet werden.

### § 3. Festlegung der Werte von $p$ und $m$ .

Um die Vorstellung zu erleichtern, sollen gleich hier die in Betracht kommenden Werte  $p$  und  $m$  festgestellt werden.

Wir nehmen, wie schon früher angegeben, an, daß die Saitenachse die  $z$ -Richtung sei, und daß der Koordinatenursprung ( $z = 0$ ) in der Mitte einer schwingenden Abteilung bzw. in der Mitte der ganzen Saite liege. Die Saite schwinge in der  $z x$ -Ebene; der Winkel  $\vartheta$  werde positiv in der Drehungsrichtung von der  $x$ -Achse zur  $y$ -Achse hin gerechnet. In der Fig. 1 ist die  $x$ -Achse nach unten, die  $y$ -Achse nach hinten, die  $z$ -Achse nach rechts gerichtet, so daß die Richtungen  $x, y, z$  in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System bilden.

Die Schwingung besitzt zwei durch den Koordinatenanfang gehende Symmetrieebenen, nämlich die  $xy$ -Ebene für die  $z$ -Koordinate, die  $xz$ -Ebene für die  $y$ -Koordinate. Aus

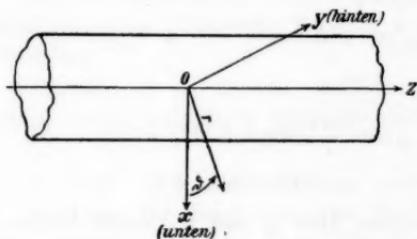


Fig. 1.

der Symmetrie in bezug auf die  $yz$ -Ebene für die  $z$ -Koordinate ergab sich schon, daß in der Entwicklung (6) nur Kosinusglieder vorkommen. Wenn  $l$  die räumliche Periode der Schwingung sein soll, so folgt weiter, daß in dieser Entwicklung nur gerade Werte der Ordnungszahl  $p$  zulässig sind, denn für die ungeraden  $p$  ist erst  $z = 2l$  die Periode. Damit ist erreicht, daß, ebenso wie bei  $z = 0$ , auch bei  $z = -l/2$  und  $+l/2$   $u_z = 0$  ist. Ist nur ein Glied mit  $p = 2$  vorhanden, so führt die Saite eine einfache Sinusschwingung aus; sind außerdem noch Glieder mit höheren Werten ( $p = 4, 6 \dots$ ) da, so überlagern sich die entsprechenden Schwingungen als Oberschwingungen dieser tiefsten Schwingung.

Von allen möglichen Werten  $m$  kommt für die schwingende Saite nur der Wert  $m = 1$  in Betracht, wenn die Saite während der Schwingung ihren kreisförmigen Querschnitt nicht ändert. Es ist ferner in Gleichung (11) nur das Glied mit

$\cos m\vartheta$  zulässig, wenn man  $\vartheta$  von der  $zx$ -Ebene an zählt, da diese Ebene als Schwingungsebene zugleich Symmetrieebene in bezug auf  $\vartheta$  sein muß;  $\sin m\vartheta$  ist aber antisymmetrisch in  $\vartheta$ . Zu den folgenden Rechnungen sollen übrigens nicht diese speziellen Werte, sondern, um volle Allgemeinheit zu wahren, die allgemeinen Ausdrücke  $m$  und  $p$  zunächst weiter benutzt werden.

Für ein Glied des Geschwindigkeitspotentials mit den Ordnungszahlen  $m$  und  $p$  erhält man den Ausdruck

$$(19) \varphi_{mp} = A_{mp} \cos m\vartheta \cos \frac{p\pi x}{l} [Z^{(1)}(xr) + \mathfrak{A}_{mp} Z^{(2)}(xr)] e^{\pm ikct},$$

wenn  $x \neq 0$  ist; dagegen

$$(20) \varphi_{mp} = A_{mp} \cos m\vartheta \cos \frac{p\pi x}{l} [r^m + \mathfrak{A}_{mp} r^{-m}] e^{\pm ikct}$$

und

$$(21) \varphi_{op} = A_{op} \cos \frac{p\pi x}{l} [\log r + \mathfrak{A}_{op}] e^{\pm ikct},$$

wenn  $x = 0$  ist.

Durch Summation über  $p$  und  $m$ , welch letztere Summation aber bei einer Saite, wie wir sahen, wegfällt, erhält man das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$ , das allgemein einem beliebig vorgegebenen Anfangszustand entspricht.

Jedes Glied  $\varphi_{mp}$  besteht nach (19) bis (21) aus zwei additiv verbundenen Termen. Von diesen kommt aber unter Umständen nur einer in Betracht. Zum Beispiel ist ohne weiteres klar, daß in (20) und (21) nur der zweite brauchbar ist, wenn das Medium sich ins Unendliche erstreckt; denn der erste würde wegen des Faktors  $r^m$  bzw.  $\log r$  mit unbegrenzt wachsender Entfernung  $r$  unbegrenzt wachsende Geschwindigkeiten, mindestens in der  $z$ -Richtung, bei (20) auch in der  $\vartheta$ - und der  $r$ -Richtung geben. Analoges gilt für Gleichung (19); auch hier kann unter Umständen einer der beiden Terme unbrauchbar werden und muß deshalb mit dem Faktor Null versehen werden, weil die betreffende Zylinderfunktion für unendliches  $xr$  selbst unendlich wird.

Die Größe  $x$  (vgl. Gleichung (14)), also auch das Argument  $xr$  der beiden Zylinderfunktionen  $Z_m^{(1)}$  und  $Z_m^{(2)}$ , kann

reell oder rein imaginär sein. Ob die Zylinderfunktionen selbst reell oder komplex sind, ist gleichgültig, da wir ohnehin mit komplexen Größen rechnen. Für die Anwendung auf das physikalische Problem ist in bekannter Weise eine der beiden reellen Formen von  $\varphi_{mp}$  zu benutzen, die durch Trennung des komplexen Wertes  $\varphi_{mp}$  in seinen reellen und imaginären Teil erhalten werden. Wesentlich ist nur, die als Integrale von (9) anzusetzenden Zylinderfunktionen so auszuwählen, daß die Lösungen  $\varphi_{mp}$  physikalisch brauchbare Fälle ergeben. Solche Fälle gibt es beim stationären Zustand, für den unser Ansatz (3) allein gilt, zwei wesentlich verschiedene:

1. eine Bewegung des Mediums, die in großer Entfernung  $r$  in eine fortschreitende, einfach periodische (sinusförmige) Wellenbewegung übergeht, deren Amplitude nach außen hin abnimmt;
2. eine stehende, d. h. überall zeitlich gleichphasige Wellenbewegung, deren Amplitude ebenfalls nach außen hin abnimmt.

Ist das die Saite umgebende Medium nach außen begrenzt, z. B. in einem zur Saite koaxialen Hohlzylinder mit festen Wänden eingeschlossen, so kann nur der zweite Fall (stehende Wellen) auftreten. Ist es unbegrenzt, so liegt es nahe anzunehmen, daß nur der erste Fall (fortschreitende Wellen) vorkommen könne. Die Rechnung auf Grund des allgemeinen Ansatzes Gleichung (3) zeigt aber, daß beide Fälle möglich sind, und zwar der fortschreitende Wellentypus als stationärer Zustand bei realem  $\alpha$ , der stehende Wellentypus bei imaginärem  $\alpha$ .

#### § 4. Das Beispiel der Kugelwellen.

Um einen Anhalt für die zweckmäßige Auswahl der Zylinderfunktionen  $Z_m^{(1)}(\alpha r)$  und  $Z_m^{(2)}(\alpha r)$  in Gleichung (19) zu erhalten, soll das bekannte Beispiel der *Kugelwellen* herangezogen werden. Ihre Differentialgleichung erhält man bekanntlich aus Gleichung (1), indem man räumliche Polarkoordinaten einführt und vollkommene Symmetrie um den Koordinatenanfangspunkt  $r = 0$  herum annimmt, so daß alles nur vom Radiusvektor  $r$  abhängt.  $\Delta \varphi$  wird alsdann

$$(22) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2}.$$

Durch Einführung dieses Ausdrucks  $\Delta \varphi$  nimmt Gleichung (1) hier die Form an

$$(23) \quad \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(24) \quad \varphi = \frac{1}{r} F(r + c t) + \frac{1}{r} \Phi(r - c t),$$

wo  $F$  und  $\Phi$  zwei ganz beliebige Funktionen sein können;  $\Phi(r - c t)$  stellt vom Zentrum  $r = 0$  nach außen fortschreitende (auslaufende),  $F(r + c t)$  von außen nach dem Zentrum  $r = 0$  hinschreitende (einlaufende) Wellen dar. Wenn  $F$  bzw.  $\Phi$  Sinusfunktionen sind, hat man einfach pendelförmige (sinusförmige) Wellen.

Der hier skizzierte, zur d'Alembertschen Lösung (24) führende Weg der Integration führt, wie bekannt, bei dem entsprechenden Problem mit Zylinderkoordinaten nicht zum Ziel. Man kann aber den für Zylinderkoordinaten allein gangbaren Weg, den wir mit dem Ansatz Gleichung (3) eingeschlagen haben, auch bei dem Kugelwellenproblem beschreiten und auf ihm zum gleichen Ziel gelangen. Setzt man nämlich, entsprechend Gleichung (3),

$$(25) \quad \varphi = \psi(r) e^{\pm i k c t},$$

so muß  $\psi$  der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen

$$(26) \quad \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + k^2 \psi = 0.$$

Die Integrale dieser Gleichung sind formell durch Zylinderfunktionen darstellbar, die aber in Sinus- und Kosinusfunktion, bzw. die Exponentialfunktion, dividiert durch  $r$ , ausarten, nämlich<sup>1)</sup>

1) Reelle Zylinderfunktionen, welche (26) befriedigen, gibt es nur die beiden mit gebrochenem Index  $J_{\frac{1}{2}}(kr) = N_{-\frac{1}{2}}(kr)$  und  $J_{-\frac{1}{2}}(kr) = N_{\frac{1}{2}}(kr)$ . Wegen der Bezeichnungen vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln und Formeln, p. 90 ff. Teubner, Leipzig 1909.

$$(27) \quad \begin{cases} \psi^I = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{-\frac{1}{2}}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\cos kr}{r} \\ \psi^{II} = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{+\frac{1}{2}}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\sin kr}{r} \end{cases}$$

Statt dieser beiden reellen Funktionen, die den Besselschen und Neumannschen Funktionen  $J_m(xr)$  und  $N_m(xr)$  entsprechen, kann man als Integrale auch die komplexen, aus ihnen ableitbaren Funktionen, nehmen.

$$(28) \quad \begin{cases} \psi^{I'} = \psi^I + i\psi^{II} = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\cos kr + i \sin kr}{r} = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{e^{ikr}}{r} \\ \psi^{II'} = \psi^I - i\psi^{II} = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{\cos kr - i \sin kr}{r} = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \frac{e^{-ikr}}{r} \end{cases}$$

Sie entsprechen den Hankelschen Zylinderfunktionen  $H^{(1)}$  und  $H^{(2)}$ .<sup>1)</sup>

Nimmt man als Integral  $\psi(r)$  von (26) eine der reellen Funktionen  $\psi^I(r)$  oder  $\psi^{II}(r)$  von (27) oder auch — was nur eine Phasenverschiebung bzw. Verlegung des Zeitanfangs bedeutet —, die Summe beider, jede mit einem willkürlichen Faktor multipliziert, so erhält man *stehende Kugelwellen*; in reeller Form, indem man  $e^{\pm ikr}$  in seinen reellen und imaginären Teil zerlegt.

Nimmt man als  $\psi(r)$  aber eine der komplexen Funktionen (28) oder auch wieder die Summe beider, jede mit einem willkürlichen Faktor multipliziert, so erhält man *fortschreitende Kugelwellen*; denn  $r\varphi$  wird dann von der Form  $e^{\pm ik(r \pm ct)}$ , also eine von  $r + ct$  bzw.  $r - ct$  abhängende Funktion, was das charakteristische Kennzeichen einer ohne Gestaltänderung fortschreitenden Welle ist. Die reelle Form derselben wird wieder durch Trennung in den reellen und imaginären Teil erhalten.

Das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  wird hier durch eine Sinuswelle dargestellt, deren Amplitude mit wachsender Entfernung  $r$  proportional  $1/r$  abnimmt. Die Geschwindigkeit der Teilchen in der  $r$ -Richtung  $u$ , und ebenso ihre Verrückungen

1) Vgl. Jahnke-Emde, l. c. p. 95. Wegen der Integration der Differentialgleichung (26) vgl. ebenda p. 166.

aus der Ruhelage  $u$ , werden durch zwei übereinander gelagerte Wellen dargestellt, deren eine eine Amplitudenabnahme proportional  $1/r$ , die andere eine solche proportional  $1/r^2$  besitzt, wie durch Differentiation von  $\varphi$  nach  $r$  folgt.

## II. Definition und Eigenschaften der Zylinderfunktionen.

### § 5. Allgemeine Definition der Zylinderfunktionen.

Ganz analog lassen sich die Wellen in dem uns beschäftigenden zylindrischen Problem darstellen. Bevor wir darauf eingehen, sollen die in Betracht kommenden Funktionen definiert werden. Wir folgen dabei der von Jahnke und Emde<sup>2)</sup> in ihren Funktionen- und Formeltafeln angewandten, sehr empfehlenswerten Bezeichnungsweise.

Die Besselsche Zylinderfunktion (Besselsche Funktion 1. Art) ist definiert durch die Potenzreihe

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_m(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{2}\xi\right)^{m+2\nu}}{\nu! \Pi(m+\nu)} = \left(\frac{\xi}{2}\right)^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^{2\nu}}{\nu! \Pi(m+\nu)} \\ = \left(\frac{\xi}{2}\right)^m \left\{ \frac{1}{0! \Pi(m)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^2}{1! \Pi(m+1)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\right)^4}{2! \Pi(m+2)} \dots \right\}; \end{array} \right.$$

$\nu$  durchläuft alle ganzzahligen positiven Werte von 0 bis  $\infty$ ,  $\Pi(m+\nu)$  ist die Gammafunktion in Gaußscher Bezeichnung ( $\nu$  eine positive ganze Zahl)<sup>1)</sup>

$$(30) \quad \Pi(m+\nu) = (m+\nu)(m+\nu-1)\dots(m+1)\Pi(m).$$

Für positive ganzzahlige Werte des Argumentes  $m+\nu$ , die hier allein in Betracht kommen, geht sie bekanntlich über in

$$(31) \quad \Pi(m+\nu) = (m+\nu)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+\nu).$$

Für negative ganzzahlige Argumentwerte ist  $1/\Pi(-\nu) = 0$ . Aus der Definitionsgleichung (29) folgt noch für ganzzahlige  $m$

$$(32) \quad J_{-m}(\xi) = -(-1)^m J_m(\xi) \quad (m \text{ ganzzahlig}).$$

Die Neumannsche Zylinderfunktion (Besselsche Funktion 2. Art) in der Bezeichnung von Jahnke und Emde ist

1) Jahnke-Emde, l. c. p. 90 ff.

2) Jahnke-Emde, l. c. p. 26.

für nicht ganzzahlige Parameterwerte  $m$  definiert durch die Gleichung

$$(33) \quad N_m(\xi) = \frac{1}{\sin m \xi} \{ J_m(\xi) \cos m \xi - J_{-m}(\xi) \}.$$

Für ganzzahlige Werte  $m$  versagt diese Gleichung, und die Definition durch eine Potenzreihe (Neumann) lautet alsdann

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_m(\xi) = \frac{2}{\pi} J_m(\xi) \log \operatorname{nat} \frac{\xi}{2} \\ \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{2} \xi\right)^{m+2\nu}}{\nu! (m+\nu)!} [\psi(\nu+1) + \psi(m+\nu+1)] \\ \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(m-\nu-1)! \left(\frac{1}{2} \xi\right)^{2\nu-m}}{\nu!}, \end{array} \right.$$

oder etwas umgeformt

$$(34a) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_m(\xi) = \frac{2}{\pi} J_m(\xi) \log \operatorname{nat} \xi - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu (\frac{1}{2} \xi)^{m+2\nu}}{\nu! (m+\nu)!} \left( \sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{m+\nu} \frac{1}{\lambda} \right) \\ \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(m-\nu-1)! \left(\frac{1}{2} \xi\right)^{2\nu-m}}{\nu!} - \frac{2}{\pi} J_m(\xi) \log \operatorname{nat} \frac{2}{\nu}. \end{array} \right.$$

Hierin durchlaufen  $\nu$  und  $\lambda$  alle ganzzahligen positiven Werte zwischen den angegebenen Grenzen;  $\log \operatorname{nat} \gamma = 0,577216$  ist die Eulersche oder Mascheronische Konstante; die Funktionen  $\psi$  in der ersten Form Gleichung (34) sind die logarithmischen Ableitungen der Gammafunktion, definiert durch die Reihe

$$(35) \quad \psi(x) = -\log \operatorname{nat} \gamma + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda+x-1} \right),$$

die sich für ganzzahlige Werte von  $x$  einfacher schreiben lässt

$$(36) \quad \psi(x) = -\log \operatorname{nat} \gamma + \sum_{\lambda=1}^{x-1} \frac{1}{\lambda}, \quad (\text{wenn } x \text{ positiv, ganz-} \\ \text{zahlig ist}).$$

Die Summe der ersten drei Glieder in Gleichung (34a) ist gleich  $2/\pi Y_m(\xi)$ , wo  $Y_m(\xi)$  die Zylinderfunktion zweiter Art in der ursprünglichen Neumannschen Definition ist.

Für ganzzahlige Werte des Parameters  $m$  gilt

$$(37) \quad N_{-m}(\xi) = (-1)^m N_m(\xi) \quad (m \text{ ganzzahlig}).$$

Diese Definitionen von  $J_m(\xi)$  und  $N_m(\xi)$  lässt man für alle reellen und komplexen Werte des Argumentes gelten. Für reelle  $\xi$  sind danach  $J_m$  und  $N_m$  beide reell, für rein imaginäre Werte  $\xi$  — komplexe Werte kommen für uns nicht in Betracht — sind beide im allgemeinen komplex. Nur für ganzzahlige Parameterwerte  $m$  vereinfacht sich dies, indem  $J_m$  bei geradem  $m$  reell, bei ungeradem  $m$  rein imaginär wird.  $N_m$  bleibt auch in diesen Fällen komplex.

Nur für reelles Argument  $\xi$  sind  $J_m$  und  $N_m$  oszillierende Funktionen, die mit unbegrenzt wachsendem  $\xi$  verschwinden wie  $1/\sqrt{\xi}$ ; sie verhalten sich für sehr große  $\xi$  wie die durch  $\sqrt{\xi}$  dividierten Kreisfunktionen  $\sin \xi$  und  $\cos \xi$  oder, was dasselbe bedeutet, wie die durch  $\sqrt{\xi}$  dividierte Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten  $e^{\pm i\xi}$ .

Für rein imaginäres Argument  $\xi$  sind  $J_m$  und  $N_m$  nichtoszillierend; sie verhalten sich für sehr große  $\xi$  wie die durch  $\sqrt{\xi}$  dividierten Hyperbelfunktionen  $\operatorname{Sh} \xi$  und  $\operatorname{CoSh} \xi$  oder, was dasselbe bedeutet, wie die durch  $\sqrt{\xi}$  dividierte Exponentialfunktion mit reelem Exponenten  $e^{\pm \xi}$ , und zwar werden beide für  $\xi = \infty$  selbst unendlich, da sie beide ein Glied mit positivem Exponenten  $\xi$  enthalten.

Im unbegrenzten Außenraum können also zur Darstellung von Wellen  $J_m(\xi)$  und  $N_m(\xi)$  nur bei reelem Argument  $\xi$  benutzt werden. Um auch bei imaginärem Argument daselbst Schwingungen darzustellen, muß man die Hankelschen Zylinderfunktionen  $H_m^{(1)}(\xi)$  und  $H_m^{(2)}(\xi)$  heranziehen, die unter den Zylinderfunktionen allein die Eigenschaft haben, im imaginär Unendlichen zu verschwinden und zwar  $H_m^{(1)}(\xi)$  für positiv,  $H_m^{(2)}(\xi)$  für negativ imaginär unendliches Argument. Auf der entgegengesetzten Seite werden sie unendlich, also  $H_m^{(1)}(\xi)$  für negativ,  $H_m^{(2)}(\xi)$  für positiv imaginär unendliches Argument; ebenso sind sie für  $\xi = 0$  unendlich.

Für reelles Argument sind beide komplex. Bei rein imaginärem Argument sind die Ausdrücke

$$i^{m+1} H_m^{(1)}(i\xi) \text{ und } i^{-(m+1)} H_m^{(2)}(-i\xi)$$

reell, wenn  $\xi$  positiv reell ist. Da unser Argument  $\pi r$  bzw.  $\pi/2 + \pi r$  immer positiv gewählt werden kann, indem man der Quadratwurzel in Gleichung (14) den positiven Wert beilegt, so kommt im wesentlichen  $H_m^{(1)}(i\xi)$  in Betracht.

Mit  $J_m(\xi)$  und  $N_m(\xi)$  hängen die Hankelschen Funktionen durch folgende Gleichungen zusammen<sup>1)</sup>:

$$(38) \quad \begin{cases} H_m^{(1)}(\xi) = J_m(\xi) + i N_m(\xi) \\ H_m^{(2)}(\xi) = J_m(\xi) - i N_m(\xi). \end{cases}$$

Sie stehen also zu den oszillierenden Funktionen  $J_m(\xi)$  und  $N_m(\xi)$  in einer ähnlichen Beziehung, wie die Exponentialfunktionen mit imaginären Exponenten  $e^{+i\xi}$  und  $e^{-i\xi}$  zu den oszillierenden Kreisfunktionen  $\sin \xi$  und  $\cos \xi$ . Dies Verhalten weist darauf hin, in Analogie mit der bequemen Lösung der Differentialgleichung der Kugelwellen durch Gleichung (28) mittels der komplexen Exponentialfunktionen, hier statt einzeln mit den Besselschen und Neumannschen Funktionen, zusammenfassend mit den komplexen Hankelschen Funktionen zu operieren, und daraus durch Trennung in den reellen und den imaginären Teil reelle Lösungen zu erhalten. In der Tat bringt die Benutzung der Hankelschen Funktionen für unser Problem eine große Vereinfachung auch insofern, als man die beiden Fälle, reelles und imaginäres Argument, in derselben Form behandeln kann.

Die Gleichungen (38) können als Definition der Hankelschen Funktionen dienen. Für rein imaginäres Argument, für das wir später  $H_1^{(1)}$  brauchen werden, ergeben sich durch Ausrechnung aus (38) die speziellen Reihenentwicklungen, die für  $m = 0$  und  $m = 1$  hier angegeben werden mögen.<sup>2)</sup>

1) In dieser Form gelten die Gleichungen nur für reelles  $\xi$ .

2) Jahnke-Emde, I. c. p. 95 u. 96.

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} i H_0^{(1)}(i\xi) = G_0^{(1)}(\xi) \\ = \frac{2}{\pi} \left\{ -\log \text{nat} \left( \frac{\gamma \xi}{2} \right) + \left( 1 - \log \text{nat} \frac{\gamma \xi}{2} \right) \frac{(1/2 \xi)^2}{1!^2} \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{1}{2} - \log \text{nat} \frac{\xi \gamma}{2} \right) \frac{(1/2 \xi)^4}{2!^2} + \dots \right\}, \end{array} \right.$$

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} -H_1^{(1)}(i\xi) = G_1^{(1)}(\xi) \\ = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{2} \left[ \log \text{nat} \frac{\gamma \xi}{2} - \frac{1}{2} + \left( \log \text{nat} \frac{\gamma \xi}{2} - 1 - \frac{1}{4} \right) \frac{(1/2 \xi)^2}{1! 2!} \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \log \text{nat} \frac{\gamma \xi}{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \frac{(1/2 \xi)^4}{2! 3!} + \dots \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Dabei ist  $\log \text{nat} \gamma$  wieder die Eulersche Konstante. Die neuen Bezeichnungen  $G_0^{(1)}(\xi)$  statt  $i H_0^{(1)}(\xi)$  und  $G_1^{(1)}(\xi)$  statt  $-H_1^{(1)}(i\xi)$  sind wegen einfacherer Schreibweise bei späteren Rechnungen gewählt; es sind die bei Jahnke-Emde in Taf. XIII tabulierten reellen Funktionen. Sie sind für  $\xi = 0$  beide positiv unendlich, fallen mit wachsendem  $\xi$  stetig und nähern sich asymptotisch dem Werte Null.

### § 6. Die Zylinderfunktionen für große Argumente.

Da mit zunehmender Entfernung von der Strahlungsquelle der Wellentypus sich mehr und mehr vereinfacht, wie aus rein physikalischen Überlegungen folgt, so ist es wichtig, das Verhalten der Zylinderfunktionen für große Argumente zu kennen. Dies ergibt sich am besten aus den halb konvergenten Reihen, in welche dieselben entwickelt werden können.<sup>1)</sup> Es mögen  $S_m(\xi)$ ,  $P_m(\xi)$ ,  $Q_m(\xi)$  folgende halbkonvergente Reihen bedeuten:

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} S_m(\xi) = 1 + \frac{4 m^2 - 1}{1! 4 \xi} + \frac{(4 m^2 - 1)(4 m^2 - 9)}{2! (4 \xi)^2} \\ + \frac{(4 m^2 - 1)(4 m^2 - 9)(4 m^2 - 25)}{3! (4 \xi)^3} + \dots \end{array} \right.$$

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} P_m(\xi) = 1 - \frac{(4 m^2 - 1)(4 m^2 - 9)}{2! (8 \xi)^2} \\ + \frac{(4 m^2 - 1)(4 m^2 - 9)(4 m^2 - 25)(4 m^2 - 49)}{4! (8 \xi)^4} - \dots \\ Q_m(\xi) = \frac{4 m^2 - 1}{8 \xi} - \frac{(4 m^2 - 1)(4 m^2 - 9)(4 m^2 - 25)}{3! (8 \xi)^3} + \dots \end{array} \right.$$

1) Jahnke-Emde, I. c. p. 98.

Dann ist

$$(43) \quad S_m(\pm 2i\xi) = P_m(\xi) \mp i Q_m(\xi),$$

und die Zylinderfunktionen werden dargestellt durch:

$$(44) \quad \begin{cases} J_m(\xi) = \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} \left\{ P_m(\xi) \cos\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) - Q_m(\xi) \sin\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi} \left\{ S_m(-2i\xi) e^{i\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} + S_m(2i\xi) e^{-i\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} \right\}, \end{cases}$$

$$(45) \quad \begin{cases} N_m(\xi) = \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} \left\{ P_m(\xi) \sin\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) + Q_m(\xi) \cos\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \right\} \\ = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}\xi} \left\{ S_m(-2i\xi) e^{i\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} - S_m(2i\xi) e^{-i\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)} \right\}, \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} H_m^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(-2i\xi) e^{i\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)}, \\ H_m^{(2)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(2i\xi) e^{-i\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (46) lassen sich auch für imaginäres Argument  $i\xi$  statt  $\xi$  benutzen und geben dann

$$(47) \quad \begin{cases} H_m^{(1)}(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(2\xi) e^{-\xi - \frac{m+1}{2}\pi i} = \pm \frac{i^{-(m+1)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(2\xi) e^{-\xi}, \\ H_m^{(2)}(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(-2\xi) e^{\xi + \frac{m\pi i}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \\ = \pm \frac{i^m}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(-2\xi) e^{\xi} = \mp \frac{i^{m+2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\xi} S_m(-2\xi) e^{\xi}. \end{cases}$$

Das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem man das positive oder negative Vorzeichen für die  $\sqrt{i}$  wählt, die bei der Substitution von  $i\xi$  für  $\xi$  im Nenner auftritt. Übereinstimmung mit der üblichen Definition der Hankelschen Funktionen für komplexes Argument<sup>1)</sup> erhält man durch Be-

1) Jahnke-Emde, I. c. p. 101.

nutzung der oberen Vorzeichen. Damit, wie erforderlich,  $H_m^2(-i\xi)$  konjugiert komplex ist zu  $H_m^{(1)}(+i\xi)$ , muß man im Nenner  $\sqrt{-\xi} = -i\sqrt{\xi}$  setzen, wenn man  $H_m^{(2)}(-i\xi)$  bildet.

Bei den entsprechenden Gleichungen (44) und (45) ist der Übergang zu imaginärem Argument, indem man  $i\xi$  statt  $\xi$  setzt, *nicht* gestattet, wenn man, wie üblich, die ursprüngliche Definition von  $J_m$  und  $N_m$  durch die Potenzreihen (29) und (34) bzw. (34a) auch für komplexes Argument gelten läßt. Denn diese geben folgende Beziehungen

$$(48) \quad \begin{cases} J_m(i\xi) = \frac{i^m}{\sqrt{2\pi\xi}} S_m(-2\xi) e^\xi \\ N_m(i\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ e^{\xi + \frac{m+1}{2}i\pi} S_m(-2\xi) - 2e^{-\xi - \frac{m+1}{2}i\pi} S_m(2\xi) \right\} \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \{ i^{m+1} e^\xi S_m(-2\xi) - i^{-m} e^{-\xi} S_m(2\xi) \}, \end{cases}$$

während sich aus (44) und (45) durch Substitution von  $i\xi$  an Stelle von  $\xi$  andere Werte ergeben würden.

Man erkennt, daß nach den Definitionen (48)  $H_m^{(2)}(i\xi) = 2J_m(i\xi)$  ist.

Aus (41) bis (42) folgt, daß  $S_m(\xi)$  und  $P_m(\xi)$  für sehr große Argumentwerte dem Werte 1,  $Q_m(\xi)$  dem Werte Null zu streben. Daraus folgt weiter die schon angeführte Eigenschaft, daß  $J_m(i\xi)$ ,  $N_m(i\xi)$  und  $H_m^{(2)}(i\xi)$  mit wachsendem  $\xi$  unendlich werden wie  $e^\xi/\sqrt{\xi}$ , während  $H_m^{(1)}(i\xi)$  wie  $e^{-\xi}/\sqrt{\xi}$  verschwindet, und daß  $J_m(\xi)$ ,  $N_m(\xi)$ ,  $H_m^{(1)}(\xi)$  und  $H_m^{(2)}(\xi)$  sich mit wachsendem  $\xi$  mehr und mehr den verklingenden oszillierenden Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right),$$

bzw. der Summe

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi\xi}} \left[ \cos\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \pm i \sin\left(\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \right]$$

nähern.

Für alle Zylinderfunktionen gelten folgende beiden Funktional- und Differentialformeln, von denen wir später Gebrauch machen werden:

$$(49) \quad Z_{m-1}(\xi) + Z_{m+1}(\xi) = \frac{2m}{\xi} Z_m(\xi),$$

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{d Z_m(\xi)}{d \xi} = - \frac{m}{\xi} Z_m(\xi) + Z_{m-1}(\xi) = \frac{m}{\xi} Z_m(\xi) - Z_{m+1}(\xi) \\ \quad = \frac{1}{2} Z_{m-1}(\xi) - \frac{1}{2} Z_{m+1}(\xi). \end{cases}$$

Hieraus folgen z. B. die in den Entwickelungen des § 12 benutzten Gleichungen:

$$(49a) \quad H_{m-1}^{(1)}(i\xi) + H_{m+1}^{(1)}(i\xi) = \frac{2m}{i\xi} H_m^{(1)}(i\xi),$$

$$(50a) \quad \begin{cases} \frac{d H_m^{(1)}(i\xi)}{d(i\xi)} = H_m^{(1)'}(i\xi) = - \frac{m}{i\xi} H_m^{(1)}(i\xi) + H_{m-1}^{(1)}(i\xi) \\ \quad = \frac{m}{i\xi} H_m^{(1)}(i\xi) - H_{m+1}^{(1)}(i\xi) = \frac{1}{2} H_{m-1}^{(1)}(i\xi) - \frac{1}{2} H_{m+1}^{(1)}(i\xi). \end{cases}$$

### III. Geschwindigkeitspotential und Bewegungszustand des Mediums.

#### § 7. Geschwindigkeitspotential und Bewegungszustand, wenn $z$ reell ist (Fall I).

Wir kehren nun zu dem physikalischen Problem der von der schwingenden Saite in dem umgebenden, *unbegrenzten* Medium erzeugten Wellen, insbesondere der Wellen in Gasen, zurück. Dieses lässt sich in den beiden Fällen, wo  $z$  (vgl. Gleichung (14)) von Null verschieden und zwar entweder reell oder rein imaginär ist, vollständig mittels der Hankelschen Zylinderfunktion erster Art  $H_m^{(1)}(zr)$  als Integral der Gleichung (12) behandeln, für die man gegebenenfalls nach (38) die Besselsche und Neumannsche Funktion einführen kann. Im Falle  $z = 0$  tritt die schon früher (Gleichung (17) und (18)) gegebene Lösung ein.

Demnach erhält man aus den Gleichungen (19) bis (21) mit Weglassung der zunächst belanglosen Amplitudenkonstante folgende komplexe Werte für ein Glied  $\varphi_{mp}$  in der Reihenentwicklung des Geschwindigkeitspotentials

$$I. \text{ Fall: } z = \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}} \text{ reell}$$

$$(51) \quad \varphi_{mp} = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} H_m^{(1)}(x r) e^{\pm i n t}$$

oder wenn man  $H_m^{(1)}(x r)$  mittels (46) darstellt

$$(51a) \quad \varphi_{mp} = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{S_m(-2i x r)}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} e^{i(x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi)}.$$

Durch Zerlegung von  $H_m^{(1)}$  bzw.  $S_m$  nach (38) und (48) ergibt sich aus (51) für kleine  $x r$

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mp} = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [J_m(x r) + i N_m(x r)] [\cos n t \pm i \sin n t] \\ = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \{ [J_m(x r) \cos n t \mp N_m(x r) \sin n t] \\ \quad + i [N_m(x r) \cos n t \pm J_m(x r) \sin n t] \}, \end{array} \right.$$

und aus (51a) für große  $x r$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mp} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \times \\ \quad \{ [P_m(x r) + i Q_m(x r)] \left[ \cos \left( x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right. \\ \quad \left. + i \sin \left( x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right] \} \\ = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \times \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_m(x r) \cos \left( x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right. \\ \quad \left. - Q_m(x r) \sin \left( x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right] \\ + i \left[ Q_m(x r) \cos \left( x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right. \\ \quad \left. + P_m(x r) \sin \left( x r \pm n t - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right] \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man den reellen Teil von  $\varphi_{mp}$  als  $\varphi_{mp}^I$ , den Faktor des imaginären als  $\varphi_{mp}^{II}$ , setzt also

$$(54) \quad \varphi_{mp} = \varphi_{mp}^I + i \varphi_{mp}^{II}$$

und schreibt zur Vereinfachung

$$(55) \quad \frac{2m+1}{4}\pi = \chi,$$

so erhält man aus (52) und (53) die beiden *reellen* Potentiale in je zwei Formen, nämlich mit Zufügung je einer Amplitudenkonstante  $A^I$  und  $A^{II}$ )

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mp}^I = A^I \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [J_m(xr) \cos nt \mp N_m(xr) \sin nt] \\ = \frac{A^I}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [P_m(xr) \cos (xr \pm nt - \chi) \\ - Q_m(xr) \sin (xr \pm nt - \chi)], \end{array} \right.$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mp}^{II} = A^{II} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [N_m(xr) \cos nt \pm J_m(xr) \sin nt] \\ = \frac{A^{II}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [Q_m(xr) \cos (xr \pm nt - \chi) \\ + P_m(xr) \sin (xr \pm nt - \chi)]. \end{array} \right.$$

Beide Lösungen stellen in großem Abstande von der Saite forschreitende Sinuswellen dar, wie aus der zweiten Form von (56) und (57) am deutlichsten zu ersehen ist; denn das Argument der Sinus- bzw. Kosinusfunktion daselbst enthält Ort und Zeit in der für solche Wellen charakteristischen linearen Verbindung  $xr \pm nt$ . Das obere Vorzeichen gilt für die einlaufende, das untere für die auslaufende Welle. Natürlich kann man dies auch schon aus der komplexen Form (51a) bzw. (53) ablesen. Die beiden Wellen  $\varphi^I$  und  $\varphi^{II}$  sind in der Zeitphase um  $\pi/2$ , d. h. um eine Viertelschwingung, gegeneinander verschoben. Jede der beiden Wellen setzt sich aus zwei Teilwellen zusammen, die ebenfalls in der Zeitphase um  $\pi/2$ , d. h. um eine Viertelschwingung gegeneinander verschoben sind.

1) Wenn zur Darstellung des Geschwindigkeitspotentials  $\varphi$  mehrere Teilpotentiale mit verschiedenen  $m$  bzw.  $p$  benutzt werden müssen, so müssen die Amplitudenkonstanten zur Unterscheidung natürlich mit Indizes geschrieben werden als  $A_{mp}^I$  und  $A_{mp}^{II}$ .

Die Amplitude der Teilwellen ist sehr ungleich; sie nimmt mit wachsendem Abstand  $r$  nach zwei verschiedenen Gesetzen ab, da  $P_m(xr)$  und  $Q_m(xr)$  sich verschieden verhalten. Je größer  $r$  wird, desto kleiner wird  $Q_m(xr)$ , das wie  $1/xr$  abnimmt, gegen  $P_m(xr)$ , das sich dem konstanten Werte 1 nähert. In hinreichend großer Entfernung bleiben also in  $\varphi^I$  und  $\varphi^{II}$  nur die Teilwellen übrig, die  $P_m(xr)$  als Faktor haben. Die Amplitude dieser schließlich allein in merklichem Betrage übrig bleibenden Wellen nimmt ab wie  $1/\sqrt{r}$ .

Durch Übereinanderlagerung von  $\varphi_{mp}^I$  und  $\varphi_{mp}^{II}$  erhält man die reelle Lösung in allgemeinerer Form, welche erlaubt, den Anfangspunkt der Zeit beliebig festzusetzen und somit die Lösung einem beliebig gegebenen Anfangszustand anzupassen; selbstverständlich zunächst nur einem der durch (56) oder (57) überhaupt darstellbaren Momentanzustände. Dieses allgemeinere reelle Geschwindigkeitspotential, das weiterhin benutzt werden soll, ist also

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mp} = \varphi_{mp}^I + \varphi_{mp}^{II} \\ = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \left\{ \begin{array}{l} [A^I J_m(xr) + A^{II} N_m(xr)] \cos nt \\ \mp [A^I N_m(xr) - A^{II} J_m(xr)] \sin nt \end{array} \right\} \\ = \frac{\cos m \vartheta}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos \frac{p \pi x}{l} \times \\ \left\{ \begin{array}{l} [A^I P_m(xr) + A^{II} Q_m(xr)] \cos (xr \pm nt - \chi) \\ - [A^I Q_m(xr) - A^{II} P_m(xr)] \sin (xr \pm nt - \chi) \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation nach den Koordinaten die Geschwindigkeitskomponenten  $u_r, u_\theta, u_z$ , weiter die Verkürzungskomponenten  $u_r, u_\theta, u_z$ , die Verdichtung  $s = (\varrho - \bar{\varrho})/\bar{\varrho}$  und den Druck  $p = \bar{p}(1 + \gamma s)$ . Dabei ist  $\varrho$  die momentane Dichte,  $\bar{\varrho}$  die Dichte im Ruhezustand,  $p$  der momentane Druck,  $\bar{p}$  der Druck im Ruhezustand des Gases,  $\gamma$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und Volumen. Es wird, wenn man zur Vereinfachung setzt

$$(59) \quad \frac{d J_m(xr)}{d(xr)} = J_m'(xr), \quad \frac{d N_m(xr)}{d(xr)} = N_m'(xr),$$

## A. die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial r} = \kappa \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} \times \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} [A^I J_m'(\kappa r) + A^{II} N_m'(\kappa r)] \cos n t \\ \mp [A^I N_m'(\kappa r) - A^{II} J_m'(\kappa r)] \sin n t \end{array} \right\} \\
 &= \frac{\kappa}{\sqrt{\pi/2}} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} \times \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ A^I \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) + A^{II} \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) \right. \\ \quad \left. - A^I \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} + A^{II} \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right] \cos (\kappa r \pm n t - \chi) \\ - \left[ A^I \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) - A^{II} \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) \right. \\ \quad \left. + A^I \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} + A^{II} \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right] \sin (\kappa r \pm n t - \chi) \end{array} \right\} \\
 (60) \quad u_\vartheta &= \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial \vartheta} = - \frac{m}{r} \sin m \vartheta \cdot \frac{\varphi_{mp}}{\cos m \vartheta} = - \frac{m}{r} \operatorname{tg} m \vartheta \varphi_{mp}, \\
 u_z &= \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial z} = - \frac{p \pi}{l} \sin \frac{p \pi z}{l} \cdot \frac{\varphi_{mp}}{\cos \frac{p \pi z}{l}} = - \frac{p \pi}{l} \operatorname{tg} \frac{p \pi z}{l} \varphi_{mp},
 \end{aligned}$$

wobei in den beiden letzten Gleichungen einer der Ausdrücke für  $\varphi_{mp}$  aus (58) einzusetzen ist, was der einfacheren Schreibweise wegen hier unterlassen ist. Weiter wird

## B. die Verrückung

$$\begin{aligned}
 u_r &= \int u_r dt = \frac{\kappa}{n} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} \times \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} [A^I J_m'(\kappa r) + A^{II} N_m'(\kappa r)] \sin n t \\ \pm [A^I N_m'(\kappa r) - A^{II} J_m'(\kappa r)] \cos n t \end{array} \right\} \\
 &= \frac{\kappa}{n \sqrt{\pi/2}} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} \times \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ A^I \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) + A^{II} \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) \right. \\ \quad \left. - A^I \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} + A^{II} \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right] \sin (\kappa r \pm n t - \chi) \\ \pm \left[ A^I \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) - A^{II} \frac{d}{d(\kappa r)} \left( \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right) \right. \\ \quad \left. + A^I \frac{P_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} + A^{II} \frac{Q_m(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} \right] \cos (\kappa r \pm n t - \chi) \end{array} \right\} \\
 (61) \quad u_\vartheta &= \int u_\vartheta dt = - \frac{m}{r} \operatorname{tg} m \vartheta \int \varphi_{mp} dt, \\
 u_z &= \int u_z dt = - \frac{p \pi}{l} \operatorname{tg} \frac{p \pi z}{l} \int \varphi_{mp} dt,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\left. \begin{aligned}
 & \int \varphi_{mp} dt = \\
 & \frac{\cos m \vartheta}{n} \cos \frac{p \pi x}{l} \left\{ \begin{aligned}
 & [A^I J_m(xr) + A^{II} N_m(xr)] \sin nt \\
 & \pm [A^I N_m(xr) - A^{II} J_m(xr)] \cos nt
 \end{aligned} \right\} \\
 & = \frac{\cos m \vartheta}{n \sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos \frac{p \pi x}{l} \times \\
 & \quad \left\{ \begin{aligned}
 & [\pm [A^I P_m(xr) + A^{II} Q_m(xr)] \sin(xr \pm nt - \chi) \\
 & \pm [A^I Q_m(xr) - A^{II} P_m(xr)] \cos(xr \pm nt - \chi)]
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

ist. Weiter wird

### C. die Verdichtung

$$\left. \begin{aligned}
 s &= -\frac{1}{c^3} \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial t} \\
 &= \frac{n}{c^3} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \left\{ \begin{aligned}
 & [A^I J_m(xr) + A^{II} N_m(xr)] \sin nt \\
 & \pm [A^I N_m(xr) - A^{II} J_m(xr)] \cos nt
 \end{aligned} \right\} \\
 &= \frac{n \cos m \vartheta}{c^3 \sqrt{\frac{1}{2} \pi x r}} \cos \frac{p \pi x}{l} \times \\
 & \quad \left\{ \begin{aligned}
 & [\pm [A^I P_m(xr) + A^{II} Q_m(xr)] \sin(xr \pm nt - \chi) \\
 & \pm [A^I Q_m(xr) - A^{II} P_m(xr)] \cos(xr \pm nt - \chi)]
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Diese Formeln gelten allgemein für Gase und Flüssigkeiten. Für ideale Gase ergibt sich ferner der Druck nach der Formel

$$(64) \quad p = \bar{p}(1 + \gamma s),$$

indem man aus (63)  $s$  einsetzt. Die Diskussion dieser Gleichungen soll später, zusammen mit denen der beiden anderen Fälle erfolgen. Nur das Eine soll noch bemerkt werden: Es ist natürlich immer möglich, gleichzeitig eine auslaufende (unteres Vorzeichen) und eine einlaufende Welle (oberes Vorzeichen in den Gleichungen (51) bis (63)) anzunehmen und aus beiden eine stehende Wellenbewegung zusammenzusetzen, d. h. eine Schwingungsbewegung, die im ganzen Raum die gleiche Zeitphase hat. Dazu müssen die Amplituden der aus- und einlaufenden Wellen gleich groß sein. Diese Lösung (stehende Wellenbewegung) erhält man auch aus dem Ansatz Gleichung (3) immer, wenn man als Integral  $R$  der Gleichung (12) nicht die Verbindung

$J_m(xr) \pm i N_m(xr)$  sondern irgend eine reelle lineare Verbindung  $J_m(xr) + \mathfrak{A} N_m(xr)$  benutzt. Physikalisch betrachtet, setzt eine solche stehende Wellenbewegung immer das Vorhandensein einer zylindrischen, mit der Saite konzentrischen, Hülle voraus, die die auslaufende Welle reflektiert und so sekundär eine einlaufende erzeugt. Denn aus dem Unendlichen kann eine Welle in Wirklichkeit nicht kommen, das ist nur eine mathematische Fiktion. Wir haben aber den Fall der Begrenzung des die Saite umgebenden Mediums ausdrücklich ausgeschlossen, so daß also stehende Schwingungen im Falle I ( $x$  reell) für uns nicht in Betracht kommen.

§ 8. Geschwindigkeitspotential und Bewegungszustand, wenn  $x = 0$  ist (Fall II).

$$\text{II. Fall: } x = \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}} = 0.$$

Da bei unbegrenztem Medium die in (20) mit enthaltene Partikularlösung mit  $r^{+m}$  eine Bewegung ergeben würde, deren Amplitude mit wachsender Entfernung schließlich unbegrenzt zunimmt, so kommt nur die Lösung mit  $r^{-m}$  in Betracht. Also wird *komplex*, wenn  $m \neq 0$  ist,

$$(65) \quad \varphi_{pm} = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} e^{\pm i \omega t}.$$

Durch Trennung in den reellen und imaginären Teil ergeben sich daraus die beiden *reellen* Geschwindigkeitspotentiale (mit Hinzufügung je eines Amplitudenfaktors  $B^I$  und  $B^{II}$ )

$$(66) \quad \varphi_{pm}^I = B^I \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} \cos n t,$$

$$(67) \quad \varphi_{pm}^{II} = B^{II} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} \sin n t.$$

Das allgemeine *reelle* Potential wird somit

$$(68) \quad \varphi_{pm} = \varphi_{pm}^I + \varphi_{pm}^{II} = B \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} \cos(n t - \varepsilon),$$

wo gesetzt ist

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} B^I = B \cos \varepsilon \\ B^{II} = B \sin \varepsilon \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} B = \sqrt{B^{I2} + B^{II2}} \\ \tan \varepsilon = \frac{B^{II}}{B^I} \end{array} \right.$$

Also wird

A. die *Geschwindigkeit*

$$(70) \begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial r} = -m B \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^{m+1}} \cos(nt - \varepsilon) \\ u_\theta = \frac{\partial \varphi_{mp}}{r \partial \vartheta} = -m B \sin m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^{m+1}} \cos(nt - \varepsilon) \\ u_z = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial z} = -\frac{p \pi}{l} B \cos m \vartheta \sin \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} \cos(nt - \varepsilon), \end{cases}$$

B. die *Verrückung*

$$(71) \begin{cases} u_r = \int u_r dt = -\frac{m}{n} B \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^{m+1}} \sin(nt - \varepsilon) \\ u_\theta = \int u_\theta dt = -\frac{m}{n} B \sin m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^{m+1}} \sin(nt - \varepsilon) \\ u_z = \int u_z dt = -\frac{p \pi}{n l} B \cos m \vartheta \sin \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} \sin(nt - \varepsilon) \end{cases}$$

C. die *Verdichtung*

$$(72) \quad s = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_{pm}}{\partial t} = \frac{n}{c^2} B \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{1}{r^m} \sin(nt - \varepsilon)$$

woraus nach (64) der Druck zu berechnen ist.

Diese Gleichungen stellen eine *stehende* Wellenbewegung dar; in allen Punkten des Raumes ist dieselbe Zeitphase vorhanden. Es ist auch nicht möglich, aus den Gleichungen, die die allgemeinste Lösung des Problems darstellen, fortschreitende Wellen zu konstruieren. Es liegt eben in der physikalischen Natur des Problems begründet, daß in diesem Übergangsfall, wenigstens im stationären Zustand, keine fortschreitende Wellenbewegung, d. h. keine Ausstrahlung möglich ist. Dasselbe gilt nun auch für den III. Fall, in dem  $x$  imaginär ist, und zu dem  $x = 0$  nur den labilen Übergang bildet.

§ 9. *Geschwindigkeitspotential und Bewegungszustand, wenn  $x$  imaginär ist (Fall III).*

$$\text{III. Fall: } x = \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}} = i x' = i \sqrt{\frac{p^2 \pi^2}{l^2} - k^2} \text{ imaginär.}$$

Bei unbegrenztem Medium ist das einzige Integral, das für  $R$  in Gleichung (12) in Betracht kommt, die Hankelsche

Funktion erster Art  $H_m^{(1)}(ix'r)$  mit dem positiven imaginären Argument  $ix'r$ , da alle anderen Zylinderfunktionen positiv imaginären Argumentes im Unendlichen selbst unendlich werden, während  $H_m^{(1)}(ix'r)$  daselbst verschwindet. Bei außen zylindrisch begrenztem Raum wäre noch eine zweite Zylinderfunktion, etwa  $J_m(ix'r)$ , hinzuzunehmen, also das Integral  $\varphi_m$ , in der vollen Form (19) zu benutzen, was hier unnötig ist. Man erhält hier also in *komplexer* Form wieder mit Weglassung der willkürlichen Amplitudenkonstanten

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{mp} = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} H_m^{(1)}(ix'r) e^{\pm int} \\ = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} i^{-(m+1)} \frac{e^{-ix'r}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x'r}} S_m(2x'r) e^{\pm int} \\ = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{e^{-ix'r}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x'r}} S_m(2x'r) e^{\pm int - i \frac{m+1}{2} \pi}. \end{array} \right.$$

Zur Umwandlung der ersten Form von (73) in die beiden anderen ist Gleichung (47) nebst der bekannten Beziehung

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad \text{also } e^{-i\frac{m+1}{2}\pi} = i^{-(m+1)}$$

benutzt worden.

Führt man noch die *reelle* Funktion<sup>1)</sup>  $G_m^{(1)}(x'r)$  des reellen Argumentes  $x'r$  durch die Gleichung

$$(74) \quad i^{m+1} H_m^{(1)}(ix'r) = \frac{e^{-ix'r}}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x'r}} S_m(2x'r) = G_m^{(1)}(x'r)$$

ein, so lässt sich, immer noch komplex, schreiben

$$(75) \quad \varphi_{mp} = \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} G_m^{(1)}(x'r) e^{\pm i \left( nt \mp \frac{m+1}{2} \pi \right)}$$

Durch Trennung folgen hieraus wie früher die *reellen* Werte, nunmehr mit Amplitudenkonstanten versehen

1) Vgl. für  $m = 0$  und  $1$  die Gleichungen (39) und (40). Die Anwendung der reellen Funktion  $G$  erleichtert den Überblick. Tafeln und Zeichnungen ihres Verlaufs bei Jahnke-Emde, p. 184. Fig. 36 und Taf. XIII.

$$(76) \quad \varphi_{m,p}^I = C^I \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} G_m^{(1)}(x'r) \cos \left( n t \mp \frac{m+1}{2} \pi \right),$$

$$(77) \quad \varphi_{m,p}^{II} = C^{II} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} G_m^{(1)}(x'r) \sin \left( n t \mp \frac{m+1}{2} \pi \right).$$

Die Phasenkonstante  $\mp \frac{m+1}{2} \pi$  muß beibehalten werden, wenn man zur Darstellung eines willkürlich gegebenen Anfangszustandes mehrere Lösungen  $\varphi_{m,p}$  mit verschiedenen  $m$  übereinander lagern muß; sonst kann sie als belanglos weggelassen werden, da man sie durch einfache Verlegung des Zeitanfangs zum Verschwinden bringen kann. Wir wollen sie der Vollständigkeit halber beibehalten.

Durch Zusammenfassung von  $\varphi_{m,p}^I$  und  $\varphi_{m,p}^{II}$  ergibt sich wieder die allgemeinere reelle Form

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{m,p} = \varphi_{m,p}^I + \varphi_{m,p}^{II} \\ \quad = \Gamma \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} G_m^{(1)}(x'r) \cos \left( n t \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right), \end{array} \right.$$

wobei gesetzt ist

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^I = \Gamma \cos \eta \\ C^{II} = \Gamma \sin \eta \end{array} \right\} \quad \text{also} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \sqrt{C^{I^2} + C^{II^2}} \\ \operatorname{tg} \eta = \frac{C^{II}}{C^I} \end{array} \right.$$

In der Form stimmt (78) ganz mit (68) überein; nur ist hier  $G_m^{(1)}(x'r)$  an Stelle von  $r^{-m}$  getreten, wodurch eine noch schnellere räumliche Dämpfung (Amplitudenabnahme mit wachsender Entfernung) bedingt ist. Die Bewegung der Flüssigkeit ist, wie im Falle II, eine zeitlich gleichphasige, d. h. stehende Wellenbewegung im ganzen Raum. Die einzelnen Größen sind dabei:

#### A. Geschwindigkeit

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{\partial \varphi_{m,p}}{\partial r} = x' \Gamma \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} \frac{d G_m^{(1)}(x'r)}{d(x'r)} \cos \left( n t \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right) \\ u_\vartheta = \frac{\partial \varphi_{m,p}}{\partial \vartheta} = -\frac{m}{r} \Gamma \sin m \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} G_m^{(1)}(x'r) \cos \left( n t \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right) \\ u_z = \frac{\partial \varphi_{m,p}}{\partial z} = -\frac{p \pi}{l} \Gamma \cos m \vartheta \sin \frac{p \pi x}{l} G_m^{(1)}(x'r) \cos \left( n t \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right). \end{array} \right.$$

## B. Verrückung

$$(81) \begin{cases} u_r = \frac{x'}{n} \Gamma \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} \frac{d G_m^{(1)}(x' r)}{d(x' r)} \sin \left( nt \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right) \\ u_\theta = - \frac{m}{rn} \Gamma \sin m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} G_m^{(1)}(x' r) \sin \left( nt \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right) \\ u_z = - \frac{p \pi}{l n} \Gamma \cos m \vartheta \sin \frac{p \pi z}{l} G_m^{(1)}(x' r) \sin \left( nt \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right), \end{cases}$$

## C. Verdichtung

$$(82) s = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = \frac{n}{c^2} \Gamma \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} G_m^{(1)}(x' r) \sin \left( nt \mp \frac{m+1}{2} \pi - \eta \right).$$

woraus man, wie früher, die momentane Dichte  $\varrho = \bar{\varrho}(1+s)$  und für Gase den Druck  $p = \bar{p}(1+\gamma s)$  berechnen kann.

## § 10. Diskussion des Bewegungszustandes.

Für die Koordinaten  $\vartheta$  und  $z$  sind die Gleichungen des Geschwindigkeitspotentials und aller daraus ableitbaren Größen in den drei Fällen  $z$  reell,  $z = 0$ ,  $z$  imaginär ganz gleich gebaut, die Bewegungsform ist also dieselbe. Für  $r$  sind die Gleichungen verschieden.

Ohne weiteres erkennt man folgendes.

Auf gewissen zur  $z$ -Achse (Längsrichtung der Saite) senkrechten Ebenen, nämlich den Ebenen, wo

$$\cos(p \pi z / l) = 0$$

ist, findet weder radiale noch tangentiale Bewegung statt; die Gas- teilchen bewegen sich daselbst nur in der  $z$ -Richtung. Diese Knotenebenen für  $u_r$  und  $u_\theta$  sind Bauchebenen für  $u_z$ .

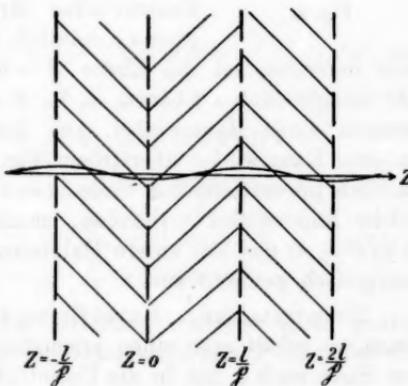


Fig. 2.

Sie schneiden die  $z$ -Achse in dem Knoten der schwingenden Saite. Mitten dazwischen liegen die Bauchebenen für  $u_r$  und  $u_\theta$ , die zugleich Knotenebenen für  $u_z$  sind. Auf ihnen ist

$\sin(p\pi z/l) = 0$ ; sie schneiden die  $z$ -Achse in den *Bäuchen* der schwingenden Saite. Zwei benachbarte Ebenen dieser letzteren Art, wo  $\sin(p\pi z/l) = 0$  ist, begrenzen eine unendlich ausgedehnte Schicht von der Dicke  $z = l/p$ , in der Energie nur in der  $r$ - und  $\vartheta$ -Richtung strömt, die also gegen die benachbarten Schichten energetisch abgeschlossen ist.

Daß dem so sein muß, folgt aus der völligen Symmetrie der Saitenschwingung und der von ihr erzeugten Flüssigkeitsbewegung rechts und links von einer solchen Ebene (vgl. Fig. 2).

Die *Knotenebenen* für die *Geschwindigkeiten*  $u_r$  und  $u_\theta$  sind auch *Knotenebenen* für die *Verrückungen*  $u_r$  und  $u_\theta$ , die *Verdichtung*  $s$  und den *Druck*  $p$ ; die *Bauchebenen* sind dementsprechend auch *Bauchebenen* für diese Größen.

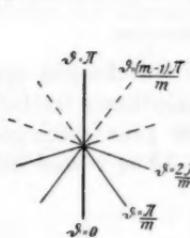


Fig. 3.

Für die  $\vartheta$ -Koordinate ergeben sich ganz analog zusammengehörige *Knotenebenen* ( $\cos m\vartheta = 0$ ) für  $u_r$  und  $u_z$  (radiale und longitudinale Bewegung), die zugleich *Knotenebenen* für *Verdichtung* und *Druck*, aber *Bauchebenen* für die *tangentielle Bewegung*  $u_\theta$  sind. Diese Ebenen enthalten alle die  $z$ -Achse. Dazwischen liegen wieder die *Knotenebenen* für die *tangentielle Bewegung*  $u_\theta$ , nämlich die Ebenen  $\sin m\vartheta = 0$ ; eine derselben ist die Ebene  $\vartheta = 0$ . Je zwei benachbarte der letztgenannten Ebenen, z. B.  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi/m$ , begrenzen einen Raumwinkel, aus dem keine Energie in die anderen Raumwinkel überströmt (Fig. 3). In dem uns hauptsächlich interessierenden Falle  $m = 1$  (vgl. § 3) sind nur zwei solche Raumwinkel vorhanden, nämlich der obere Halbraum ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ) und der untere Halbraum ( $\pi \leq \vartheta \leq 2\pi$ ), die also energetisch getrennt sind.

Nimmt man nun noch zwei Begrenzungsebenen  $\sin(p\pi z/l) = 0$  hinzu, so erhält man einen prismatischen Raum, der sich von der Saite nach  $r$  hin in die Unendlichkeit erstreckt und energetisch gegen seine Umgebung abgeschlossen ist; er möge kurz als *Schwingungsfach* bezeichnet werden. Diese geometrischen Verhältnisse kommen bei der Berechnung der Energieströmung infolge der Ausstrahlung der Saite in Betracht.

IV. Energieströmung (Strahlung) und Energieinhalt des Mediums.

§ 11. Energiestrom (Strahlung) im Fall I ( $\times$  reell) für Gase.

Die Energiestromung in der Zeit  $dt$  durch ein Flächen-element  $df$  mit der Normale  $\nu$  ist gleich der in der Zeit  $dt$  von den Druckkräften an dem Element  $df$  in der Richtung  $\nu$  geleisteten Arbeit, die sich als Produkt aus Kraft  $p df$  und Weg  $u_\nu dt$  darstellt, also

$$(83) \quad e_\nu df dt = p u_\nu df dt.$$

Die Energiestromung durch die Flächeneinheit in der Zeit  $T$  ist

$$\int_t^{t+T} e_\nu dt = \int_t^{t+T} p u_\nu dt.$$

a) Strahlung in der Richtung  $r$  (Radialströmung).

In der Richtung  $r$  senkrecht zur Saite ergibt sich die Strahlung während der Zeit  $T$  durch Einsetzen der Werte  $p$ ,  $s$ ,  $u_r$  aus den Gleichungen (60), (63) und (64)

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} e_r^{(T)} &= \int_t^{t+T} e_r dt = \int_t^{t+T} p u_r dt = \int_t^{t+T} \bar{p} (1 + \gamma s) u_r dt \\ &= \int_t^{t+T} dt \left\{ \bar{p} + \bar{p} \gamma \frac{n}{c^2} \cos \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [(A^I J_m(xr) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A^{II} N_m(xr)) \sin nt \pm (A^I N_m(xr) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A^{II} J_m(xr)) \cos nt] \right\} \\ &= \int_t^{t+T} \times x \cos \vartheta \cos \frac{p \pi x}{l} [(A^I J_m'(xr) \\ &\quad + A^{II} N_m'(xr)) \cos nt \mp (A^I N_m'(xr) \\ &\quad - A^{II} J_m'(xr)) \sin nt]. \end{aligned} \right.$$

Wichtig ist besonders die Strahlung während einer ganzen Schwingungsperiode. Ist die Integrationszeit  $T$  eine Schwingungsperiode, also

$$(85) \quad T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{k c},$$

so fallen alle Teilintegrale in (84) weg, deren Integrand eine einfache Sinus- oder Kosinusfunktion der Zeit,  $\sin nt$  oder

$\cos nt$  ist, da diese Integrale mit der Periode  $T$  periodisch sind. D. h. der Anteil, welcher dem konstanten Druck  $\bar{p}$  entspricht, verschwindet, es bleibt nur der dem variablen Teil des Druckes entsprechende; man hat also, wenn (85) gilt, einfach in (84) den ersten Term  $\bar{p}$  in der geschweiften Klammer {} zu streichen. Von dem verbleibenden Rest fallen aber noch diejenigen Glieder weg, die bei der Ausmultiplikation das Produkt  $\sin nt \cos nt = \frac{1}{2} \sin 2nt$  erhalten, denn sie sind bereits mit der Periode  $T/2$  periodisch, nehmen also auch nach der Zeit  $T$  wieder denselben Wert an. Dasselbe gilt bei den Gliedern mit den Faktoren  $\sin^2 nt$  und  $\cos^2 nt$ , die sich als  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2nt$  und  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nt$  schreiben lassen, für die Anteile mit  $\cos 2nt$ . Es bleibt schließlich nur

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_r^{(T)} = \int_t^{t+\frac{2\pi}{n}} e_r dt = \frac{\pi \bar{p} \gamma x}{c^2} \cos^2 m \vartheta \cos^2 \frac{p \pi x}{l} \times \\ (A^{I^*} + A^{II^*}) [\mp J_m(xr) N_m'(xr) \pm N_m(xr) J_m'(xr)]. \end{array} \right.$$

Nun ist nach einer bekannten Formel der Zylinderfunktionen

$$(87) \quad J_m(\xi) N_m'(\xi) - N_m(\xi) J_m'(\xi) = \frac{2}{\pi \xi},$$

so daß man als Endformel für die Strahlung durch die Flächeneinheit senkrecht zu  $r$  während einer Schwingungsperiode erhält

$$(86a) \quad e_r^{(T)} = \int_t^{t+\frac{2\pi}{n}} e_r dt = \mp \frac{2 \bar{p} \gamma}{r c^2} (A^{I^*} + A^{II^*}) \cos^2 m \vartheta \cos^2 \frac{p \pi x}{l}.$$

Mittels der bekannten Formel für die Schallgeschwindigkeit in Gasen

$$(88) \quad c^2 = \frac{\bar{p} \gamma}{\bar{\rho}}$$

läßt sich dies noch umformen in

$$(86b) \quad e_r^{(T)} = \int_t^{t+\frac{2\pi}{n}} e_r dt = \mp \frac{2 \bar{\rho}}{r} (A^{I^*} + A^{II^*}) \cos^2 m \vartheta \cos^2 \frac{p \pi x}{l}.$$

Das obere Vorzeichen gilt für die einlaufende, das untere für die auslaufende Welle; diese Vorzeichen zeigen an, daß bei jener Welle Energie von außen nach der Saite hin, bei dieser von der Saite fort nach außen transportiert wird. Jede der beiden durch  $A^I$  und  $A^{II}$  gekennzeichneten Teilwellen  $\varphi_{m,p}^I$  und  $\varphi_{m,p}^{II}$  [Gleichungen (56) und (57)] ist dabei unabhängig von der anderen, da nur die Summe der Quadrate der Amplituden  $A^{I2} + A^{II2}$ , aber kein Glied, das zugleich  $A^I$  und  $A^{II}$  enthält, in dem Ausdruck vorkommt.

Die durch ein zu  $r$  senkrecht Flächenelement während der Periode  $T$  hindurchgehende Energiemenge ist noch von der Lage dieses Elementes abhängig.

1. *Abhängigkeit von  $r$ .* Durch ein Flächenelement  $df = r d\vartheta dz$  eines konzentrisch um die Saite gelegten Zylindermantels fließt während  $T$  die Energiemenge

$$(89) \left\{ \begin{array}{l} e_r^{(T)} df = e_r^{(T)} r d\vartheta dz \\ = \mp 2\bar{\varrho} (A^{I2} + A^{II2}) \cos^2 m \vartheta \cos^2 \frac{p\pi z}{l} d\vartheta dz. \end{array} \right.$$

Sie ist unabhängig von  $r$ ; also fließt durch alle aufeinanderfolgenden Zylinderflächen von gleicher Winkelbreite  $d\vartheta$  immer die gleiche Energiemenge hindurch. Daraus folgt, daß der dauernde Energiestrom in der Richtung der Radien  $r$  nach außen bzw. nach innen erfolgt.

2. *Abhängigkeit von  $z$ .* Diese Abhängigkeit ist durch den Faktor  $\cos^2(p\pi z/l)$  in (89) bedingt; das Gesetz ist sehr einfach. In den zur Saite senkrechten Ebenen, wo  $\cos(p\pi z/l) = 0$  ist, strömt keine Energie in der  $r$ -Richtung, es sind die Ebenen, in denen die Gasteilchen sich nur in der  $z$ -Richtung bewegen. Auf den zwischenliegenden Ebenen, auf denen  $\cos(p\pi z/l) = \pm 1$  ist, findet die Maximalstrahlung in der  $r$ -Richtung statt. Diese Ebenen  $\sin(p\pi z/l) = 0$ , die Bauchebenen der Radialbewegung, teilen den Raum in parallele Schichten der Dicke  $z = l/p$ , die energetisch gegeneinander abgeschlossen sind, da durch diese Ebenen keine Energie in der  $z$ -Richtung hindurchgeht. Die Schichten sind in Fig. 2 durch verschiedene Schraffierung gekennzeichnet.

3. *Abhängigkeit von  $\vartheta$ .* Diese ist der Abhängigkeit von  $z$  ganz ähnlich, sie ist durch den Faktor  $\cos^2 m \vartheta$  gegeben. In

den Richtungen  $\vartheta$ , in denen  $\cos m\vartheta = \pm 1$  ist, strömt der Maximalbetrag; für den Wert  $m = 1$ , der allein in Betracht kommt, sind dies die Richtungen  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$ ; d. h. also, in der Schwingungsebene der Saite findet die stärkste Strahlung statt. In der dazu senkrechten Richtung  $\vartheta = \pm \pi/2$  fließt keine Energie von der Saite fort oder zu ihr hin.

Integriert man den Ausdruck (89) für  $e_r^{(T)} df$  zwischen zwei benachbarten Knotenebenen, also z. B. von  $z = 0$  bis  $z = l/p$ , und zwischen zwei Ebenen, die um den Winkel  $\pi/m$  gegeneinander geneigt sind, also z. B. zwischen  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi/m$  ( $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$  für  $m = 1$ ), so erhält man die ganze innerhalb des so gebildeten prismatischen Raumes — den wir kurz ein *Schwingungsfach* nennen — aus- bzw. einstrahlende Energie. Es ergibt sich nach einigen einfachen Rechnungen

$$(90) \quad \left[ E_r^{(T)} \right]_{\substack{z=0, \vartheta=0}} = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{z=0}^{l/p} e_r^{(T)} r d\vartheta dz = \mp \frac{\bar{\varrho} \pi l}{2m p} (A^{12} + A^{112}).$$

Bei der schwingenden Saite mit  $m = 1$  umfaßt ein solches Schwingungsfach von  $\vartheta = 0$  bis  $\pi/m$  den gesamten Raum auf *einer* Seite der Schwingungsebene. Für die Gesamtstrahlung nach allen Richtungen innerhalb einer Schicht zwischen zwei Knotenebenen ( $z = 0$  und  $z = l/p$ ) erhält man daher das Doppelte, also

$$(91) \quad \left[ E_r^{(T)} \right]_{\substack{z=0, \vartheta=0}} = \frac{\bar{\varrho} \pi l}{p} (A^{12} + A^{112}) = \frac{\bar{\varrho}}{2} 2 \pi \frac{l}{p} (A^{12} + A^{112}).$$

*Dies ist also der Betrag der Energie, die in einer Periode von einer zwischen zwei benachbarten Knoten gelegenen Abteilung der Saite ausgestrahlt wird. Von der ganzen Saite wird  $p$  mal so viel ausgestrahlt, da  $p$  Abteilungen vorhanden sind.*

b) *Energieströmung in der Richtung  $\vartheta$  (Tangentialströmung).*

Eine Strahlung ist hier nicht vorhanden, sondern eine hin und her pendelnde Strömung, die mit der Schwingungsperiode  $T$ , teilweise auch schon mit  $T/2$  periodisch ist. Man

erhält sie, indem man  $\int_0^T p u_\phi dt$  bildet, die Werte  $p$  und  $u_\phi$  aus (64), (63), (60) und (58) einsetzt und integriert. Der Ausdruck lautet

$$\left. \begin{aligned}
 e_\phi^{(T)} &= \int_t^{t+T} p u_\phi dt \\
 &= \int_t^{t+T} \left\{ \bar{p} + \bar{p} \gamma \frac{n}{c^2} \cos m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} [(A^I J_m(x r) \\
 &\quad + A^{II} N_m(x r)) \sin n t \pm (A^I N_m(x r) \\
 &\quad - A^{II} J_m(x r)) \cos n t] \right\} \\
 &\quad \times \frac{m}{r} \sin m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} [(A^I J_m(x r) \\
 &\quad + A^{II} N_m(x r)) \cos n t \mp (A^I N_m(x r) \\
 &\quad - A^{II} J_m(x r)) \sin n t] dt.
 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Hieraus erhellt sofort die obige Behauptung über die Periodizität der Energieströmung, denn beim Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen der geeigneten Glieder erhält man zunächst zwei Glieder mit  $\cos n t$  bzw.  $\sin n t$ , die bei der Integration wieder den Faktor  $\sin n t$  bzw.  $\cos n t$  bekommen, also mit der Periode  $T = 2\pi/n$  periodisch sind. Weiter erhält man zwei Glieder mit  $\cos 2n t$  und  $\sin 2n t$ , deren Integrale, mit  $\sin 2n t$  und  $\cos 2n t$  behaftet, schon mit der Periode  $T/2 = \pi/n$  periodisch sind. Sämtliche Glieder des Integrals (92) fallen also bei Integration über eine ganze Periode weg.

### c) Energieströmung in der Richtung $z$ (Parallelströmung).

Für sie gilt dasselbe wie für die  $\vartheta$ -Strömung; sie ist rein periodisch. Die Energie pendelt während jeder Periode innerhalb jeder der früher erwähnten periodischen Schichten (vgl. Fig. 2) in der  $z$ -Richtung hin und her, schreitet aber nicht andauernd in dem einen oder anderen Sinne von  $z$  fort. Da auf der Saite keine fortschreitende, sondern eine stehende Wellenbewegung angenommen ist, so kann ja aus Symmetriegründen in der Umgebung auch keine fortschreitende Bewegung nach der  $z$ -Richtung stattfinden. Die Formel für  $e_z^{(T)}$

geht aus der Formel (92) für  $e_{\vartheta}^{(T)}$  hervor, indem man den Faktor

$$\frac{m}{r} \sin m \vartheta \cos \frac{p \pi z}{l} \quad \text{durch} \quad \frac{p \pi}{l} \cos m \vartheta \sin \frac{p \pi z}{l}$$

ersetzt, da sich  $u_{\vartheta}$  und  $u_z$  nur durch diese Faktoren unterscheiden.

Die Richtung, in der die Energie durch irgendeinen festen Punkt des Raumes hindurchströmt, wechselt von Augenblick zu Augenblick, da das Größenverhältnis der Geschwindigkeitskomponenten  $u_r$ ,  $u_{\vartheta}$ ,  $u_z$  sich periodisch ändert. Die Linien, längs welchen die Energie in einem gegebenen Zeitmoment strömt, sind gekrümmte Linien (im allgemeinen schlängelförmige Raumkurven). Nur in den Ebenen, in denen eine der genannten Komponenten dauernd gleich Null ist, hat man ebene Stromlinien der Energie, d. h. in den Ebenen senkrecht zur Saite, wo  $\sin(p \pi z/l) = 0$ , also  $z = 0, \pm l/p, \pm 2l/p \dots$  ist (Bauchebenen der Schwingung), und in den Ebenen, welche die  $z$ -Achse enthalten und für die  $\sin m \vartheta = 0$ , also  $\vartheta = 0, \pm \pi/m, \pm 2\pi/m \dots$  ist; d. h. bei der Saite mit  $m = 1$  in der Schwingungsebene derselben. Die Stromlinien ändern ihre Gestalt periodisch.

Verschieden von diesen Kurven, den Stromlinien der Energie, welche die momentane Richtung der Energieströmung in jedem Augenblick für das ganze Feld angeben, sind natürlich die Bahnen, welche je ein gegebenes Energieelement beim Vorwärtsschreiten zurücklegt; denn diese Bahnen setzen sich aus den aneinander anschließenden Längenelementen derjenigen Stromlinien zusammen, die für aufeinanderfolgende Zeitelemente gelten. Diese Verhältnisse hier weiter zu verfolgen, hat aber keinen Zweck.

#### § 12. Energieinhalt des Mediums im Fall II ( $z = 0$ ) und III ( $z$ imaginär).

In den Fällen II und III ( $z = 0$  und  $z$  imaginär) ist keine forschreitende Wellenbewegung, also auch keine Energieausstrahlung vorhanden. Bei den durch die Gleichungen (68) ff. und (78) ff. dargestellten stehenden Wellen, die für diese Fälle charakteristisch sind, findet nur ein Hin und Herpendeln der

Energie des Mediums in der Periode der Saitenschwingung statt, das kein besonderes Interesse erregt. Von Interesse ist aber die Kenntnis des gesamten Energieinhalts, der nach Eintritt des stationären Zustandes in dem unendlich ausgedehnten Medium steckt.

Unsere Gleichungen gelten für den stationären Zustand. Solange dieser noch nicht erreicht ist, muß Energiestrahlung stattfinden. Wenn z. B. die Saite zur Zeit  $t = 0$  in dem bis dahin ruhenden Medium zu schwingen anfängt, so sendet sie fortschreitende Wellen in das Medium hinaus, die Energie in dasselbe übertragen. Diese Energie erfüllt, nach außen fortschreitend, allmählich den ganzen unendlichen Raum. Wenn dieser Vorgang beendet ist, wird der Zustand stationär. Streng genommen tritt das erst nach unendlich langer Zeit ein, da erst dann alle Punkte des Raumes von den Wellen erreicht sind und jede Stelle die ihr im stationären Zustande zukommende Energiedichte angenommen hat. In Wirklichkeit kann dieser Prozeß praktisch bereits in endlicher Zeit beendet sein, wenn nämlich die Verteilung der Energie im stationären Zustand derart ist, daß der gesamte Energieinhalt des unendlichen Raumes endlich bleibt. In diesem Fall enthalten die ferneren Teile des Raumes so geringe Energiemengen, daß man sie praktisch vernachlässigen kann, und ein dem streng stationären Zustand angenäherter stellt sich schon ein, wenn erst ein endlicher Teil des Raumes von den Wellen durchsetzt ist, wozu natürlich auch nur eine endliche Zeit und die Abgabe einer endlichen Energiemenge erforderlich ist.

Dies tritt, wie sofort nachgewiesen werden soll, im Fall III ein, wo  $\alpha$  imaginär ist; und zwar wird unter sonst gleichen Umständen die nötige Energiemenge um so kleiner, je größer der absolute Betrag von  $\alpha$  ist.

Schon in dem Übergangsfall II ( $\alpha = 0$ ) bleiben die der  $r$ - und  $\vartheta$ -Komponente der Bewegung entsprechenden Energieanteile immer endlich wenn  $m > 0$  ist, dagegen bleibt der der  $z$ -Komponente entsprechende Teil nur dann endlich, wenn  $m > 1$  ist; er wird also in dem uns besonders interessierenden Falle  $m = 1$  schon unendlich, jedoch nur logarithmisch unendlich, wonach man erwarten kann, daß im Falle III ( $\alpha$  imaginär) auch dieser Anteil endlich bleibt, wie auch die Rechnung bestätigt.

Der Energieinhalt ist formal leicht anzugeben. Da es sich um eine stehende, überall zeitlich gleichphasige Schwingungsbewegung handelt, so ist zu gewissen Zeiten die gesamte Energie kinetisch, zu gewissen anderen Zeiten rein potentiell, in den Zwischenzeiten geteilt teils kinetisch, teils potentiell. Rein kinetisch ist sie zu den Zeiten wo  $\sin(nt - \varepsilon) = 0$  ist (im Fall II) oder  $\sin(nt \mp (m+1)\pi/2 - \eta) = 0$  ist (im Falle III). Denn dann ist die Verrückung und Verdichtung überall gleich Null, während die Geschwindigkeit ihren zeitlichen Extremwert hat; d.h. es ist  $\cos(nt - \varepsilon) = \pm 1$  in Fall II,  $\cos(nt \mp (m+1)\pi/2 - \eta) = \pm 1$  im Fall III.

Die kinetische Energie eines Massenelementes  $\varrho d\tau = \varrho dr r d\vartheta dz$  in einem solchen ausgezeichneten Zeitpunkt, also auch die Gesamtenergie des Raumelementes  $d\tau$ , ist

$$(93) \quad dW = \frac{1}{2} \bar{\varrho} dr r d\vartheta dz (\underline{u_r}^2 + \underline{u_\vartheta}^2 + \underline{u_z}^2),$$

wo die unterstrichenen Geschwindigkeitswerte  $\underline{u_r}$  usw. (die zeitlichen Extremwerte) sich aus (70) bzw. (80) ergeben, indem man daselbst den Zeitfaktor  $\cos(nt - \varepsilon)$  bzw.  $\cos(nt \mp (m+1)\pi/2 - \eta)$  gleich 1 setzt. Die Dichte des Volumenelementes ist gleich dem Ruhewert  $\bar{\varrho}$ , da zu dieser Zeit die Verdichtung überall Null ist.

Indem man  $dW$  über den früher betrachteten prismatischen Raum (Schwingungsfach) von  $z = 0$  bis  $z = l/p$  und von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = \pi/m$ , sowie von  $r = r_1$  bis  $r$ , d. h. von der Oberfläche der Saite an bis zu einer willkürlichen Entfernung  $r$  integriert, erhält man die ganze Energie dieses Raumes, den man ins Unendliche ausdehnen kann, wenn man  $r$  unbegrenzt wachsen lässt. Die Integrationen über  $\vartheta$  und  $z$  ergeben die Faktoren  $\pi/2m$  und  $l/2p$  und man erhält schließlich die Energie eines solchen Schwingungsfaches

$$(94) \quad \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{m}} \int_{z=0}^{\frac{l}{p}} \int_{r=r_1}^r dW = \frac{\bar{\varrho}}{2} \frac{\pi}{2m} \frac{l}{2p} \int_{r_1}^r r (\underline{u_r}^2 + \underline{u_\vartheta}^2 + \underline{u_z}^2) dr.$$

Die doppelt unterstrichenen Größen  $\underline{\underline{u}}$  sind die absoluten Extremwerte der Geschwindigkeitskomponenten, die man erhält, indem man alle von  $t$ ,  $\vartheta$  und  $z$  abhängigen Kreisfunktionen in (70) und (80) gleich ihrem Maximalwert 1 setzt.

II. Fall ( $\alpha = 0$ ): Wenn  $\alpha = 0$  ist, so folgt aus (70)

$$(95) \quad \underline{\underline{u_r}}^2 = \underline{\underline{u_\phi}}^2 = \frac{m^2 B^2}{r^{2m+2}}, \quad \underline{\underline{u_z}}^2 = \frac{p^2 \pi^2 B^2}{l^2 r^{2m}}, \text{ wenn } m \neq 0.$$

Die in (94) enthaltenen drei Teilintegrale werden demnach im Falle II ( $\alpha = 0$ )

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{r_1}^r r \underline{\underline{u_r}}^2 dr = \int_{r_1}^r r \underline{\underline{u_\phi}}^2 dr = \int_{r_1}^r \frac{m^2 B^2}{r^{2m+1}} dr \\ = \begin{cases} \frac{m^2 B^2}{2} \left( \frac{1}{r_1^{2m}} - \frac{1}{r^{2m}} \right), & \text{wenn } m \neq 0, \\ m^2 B^2 \log \frac{r}{r_1}, & \text{wenn } m = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{r_1}^r r \underline{\underline{u_z}}^2 dr = \int_{r_1}^r \frac{p^2 \pi^2 B^2}{l^2 r^{2m-1}} dr \\ = \begin{cases} \frac{p^2 \pi^2 B^2}{(2m-2)l^2} \left( \frac{1}{r_1^{2m-2}} - \frac{1}{r^{2m-2}} \right), & \text{wenn } m \neq 1, \\ \frac{p^2 \pi^2 B^2}{l^2} \log \frac{r}{r_1}, & \text{wenn } m = 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Es kommen nur Werte  $m > 0$  in Betracht.

Die Gesamtenergie eines prismatischen Raumes zwischen  $\vartheta = 0$  und  $\pi/m$ ,  $z = 0$  und  $l/p$ ,  $r = r_1$  und  $r = r$  erhält man durch Einsetzen dieser Werte in (94). Wenn  $m \leq 1$  ist, wird das Integral (97) mit unbegrenzt wachsendem  $r$  unendlich, während die beiden Integrale (96) dabei endlich bleiben, ausgenommen den Fall  $m = 0$  und die überhaupt nicht vorkommenden Fälle, wo  $m < 0$  ist. Gerade in dem uns hauptsächlich interessierenden Fall  $m = 1$  wird also der Energieinhalt des unendlichen Gasraumes selbst unendlich groß, wenn  $\alpha = 0$  ist.

Anders im Falle III, wo  $\alpha$  imaginär ist. Hier bleiben alle drei Teilintegrale von (94) endlich; auch wenn  $m = 1$  oder  $= 0$  ist.

III. Fall ( $\alpha = ix' \text{ imaginär}$ ): Wenn  $\alpha$  imaginär ist, erhält man aus (80) die absoluten Extremwerte der Geschwindigkeiten

$$(98) \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{u_r}}^2 = \mathbf{x}'^2 \Gamma^2 \left[ G_m^{(1)'}(\mathbf{x}' r) \right]^2 = i^{2m+4} \mathbf{x}'^2 \Gamma^2 \left[ H_m^{(1)'}(i \mathbf{x}' r) \right]^2 \\ \underline{\underline{u_\vartheta}}^2 = \frac{m^2 \Gamma^2}{r^2} \left[ G_m^{(1)}(\mathbf{x}' r) \right]^2 = \frac{i^{2m+2} m^2 \Gamma^2}{r^2} \left[ H_m^{(1)}(i \mathbf{x}' r) \right]^2 \\ \underline{\underline{u_z}}^2 = \frac{p^2 \pi^2 \Gamma^2}{l^2} \left[ G_m^{(1)}(\mathbf{x}' r) \right]^2 = \frac{i^{2m+2} p^2 \pi^2 \Gamma^2}{l^2} \left[ H_m^{(1)}(i \mathbf{x}' r) \right]^2. \end{array} \right.$$

Die in der letzten Vertikalreihe stehenden Ausdrücke erhält man, indem man für  $G_m^{(1)}$  nach (74) wieder die Hankelsche Funktion  $H_m^{(1)}$  einführt, deren Argument hier imaginär ist. Der Energiebetrag innerhalb eines „Schwingungsfaches“ von  $z = 0$  bis  $z = l/p$ ,  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = \pi/m$  und  $r = r_1$  bis  $r$  wird daher nach (94)

$$(99) \left\{ \begin{array}{l} \int dW = \frac{\bar{q} l \pi \Gamma^2}{8 m p} \left\{ \int_{\mathbf{x}' r} \left[ \frac{d G_m^{(1)}(\mathbf{x}' r)}{d(\mathbf{x}' r)} \right]^2 d(\mathbf{x}' r) \right. \\ \quad \left. + m^2 \int_{\mathbf{x}' r} \left[ G_m^{(1)}(\mathbf{x}' r) \right]^2 d(\mathbf{x}' r) + \frac{p^2 \pi^2}{l^2 k'^2} \int_{\mathbf{x}' r} \left[ G_m^{(1)}(\mathbf{x}' r) \right]^2 d(\mathbf{x}' r) \right\}^r \\ \quad = \frac{\bar{q} l \pi \Gamma^2}{8 m p} \left\{ Z_m^{(1)}(\xi) + m^2 Z_m^{(2)}(\xi) + \frac{p^2 \pi^2}{l^2 k'^2} Z_m^{(3)}(\xi) \right\}, \end{array} \right. \begin{array}{l} \xi = \mathbf{x}' r \\ r = r_1 \\ \xi = \mathbf{x}' r_1 \end{array}$$

indem man zur Vereinfachung die drei darin vorkommenden Integrale mit  $Z_m^{(1)}(\xi)$ ,  $Z_m^{(2)}(\xi)$ ,  $Z_m^{(3)}$  bezeichnet. Diese sind

$$(100) \quad Z_m^{(1)}(\xi) = \int \xi \left[ \frac{d G_m^{(1)}(\xi)}{d \xi} \right]^2 d \xi = i^{2m+2} \int i \xi \left[ \frac{d H_m^{(1)}(i \xi)}{d(i \xi)} \right]^2 d(i \xi),$$

$$(101) \quad Z_m^{(2)}(\xi) = \int \frac{1}{\xi} \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 d \xi = i^{2m+2} \int \frac{1}{i \xi} \left[ H_m^{(1)}(i \xi) \right]^2 d(i \xi),$$

$$(102) \quad Z_m^{(3)}(\xi) = \int \xi \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 d \xi = i^{2m} \int (i \xi) \left[ H_m^{(1)}(i \xi) \right]^2 d(i \xi),$$

wobei

$$(103) \quad \mathbf{x}' r = \xi$$

ist. Mit Rücksicht darauf, daß für  $H_m^{(1)}$  als Zylinderfunktion die Differentialformel (50a) gilt, in der aber natürlich das Argument  $\xi$  durch  $i \xi$  zu ersetzen ist, läßt sich das erste dieser Integrale,  $Z_m^{(1)}$  noch umformen in

$$\begin{aligned}
 (104) \quad Z_m^{(1)}(\xi) &= \int \xi \left[ -\frac{m}{\xi} G_m^{(1)}(\xi) - G_{m-1}^{(1)}(\xi) \right]^2 d\xi \\
 &= i^{2m+2} \int (i\xi) \left[ -\frac{m}{i\xi} H_m^{(1)}(i\xi) + H_{m-1}^{(1)}(i\xi) \right]^2 d(i\xi) \\
 &= m^2 \int \frac{1}{\xi} \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 d\xi + \int \xi \left[ G_{m-1}^{(1)}(\xi) \right]^2 d\xi \\
 &+ 2m \int G_m^{(1)}(\xi) G_{m-1}^{(1)}(\xi) d\xi \\
 &= m^2 i^{2m+2} \int \frac{1}{i\xi} \left[ H_m^{(1)}(i\xi) \right]^2 d(i\xi) + i^{2m+2} \int i\xi \left[ H_{m-1}^{(1)}(i\xi) \right]^2 d(i\xi) \\
 &- 2m i^{2m+2} \int H_m^{(1)}(i\xi) H_{m-1}^{(1)}(i\xi) d(i\xi) \\
 &= m^2 Z_m^{(2)}(\xi) + Z_{m-1}^{(3)}(\xi) + 2m Z_{m,m-1}^{(4)}(\xi),
 \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{aligned}
 (105) \quad Z_{m,m-1}^{(4)}(\xi) &= \int G_m^{(1)}(\xi) G_{m-1}^{(1)}(\xi) d\xi \\
 &= i^{2m} \int H_m^{(1)}(i\xi) H_{m-1}^{(1)}(i\xi) d(i\xi) \\
 &= i^{2m} \int H_m^{(1)}(i\xi) H_m^{(1)}(i\xi) d(i\xi) + m i^{2m} \int \frac{1}{i\xi} \left[ H_m^{(1)}(i\xi) \right]^2 d(i\xi) \\
 &= \frac{i^{2m}}{2} \left[ H_m^{(1)}(i\xi) \right]^2 + m i^{-2} Z_m^{(2)}(\xi) \\
 &= -\frac{1}{2} \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 - m Z_m^{(2)}(\xi).
 \end{aligned}$$

Also wird schließlich

$$(104a) \quad Z_m^{(1)}(\xi) = -m^2 Z_m^{(2)}(\xi) + Z_{m-1}^{(3)}(\xi) - m \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2,$$

und das Energieintegral (99) läßt sich somit durch die Funktion  $G_m^{(1)}$  und die beiden Integrale  $Z_m^{(2)}$  und  $Z_m^{(3)}$  bzw.  $Z_{m-1}^{(3)}$  ausdrücken. Setzt man  $Z_m^{(1)}$  nach (104a) in (99) ein, so fällt noch  $Z_m^{(2)}$  ganz heraus, und der Energieinhalt wird durch  $G_m^{(1)}$  und  $Z_m^{(3)}$  bzw.  $Z_{m-1}^{(3)}$  ausgedrückt in der Form

$$(106) \quad \int dW = \frac{\bar{\varrho} l \pi I^2}{8m \mathfrak{p}} \left\{ Z_{m-1}^{(3)}(\xi) - m \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 + \frac{\mathfrak{p}^2 \pi^2}{l^2 \kappa'^2} Z_m^{(3)}(\xi) \right\} \quad \begin{matrix} \xi = \kappa' r \\ \xi = \kappa' r_1 \end{matrix}.$$

Die Integrale  $Z_m^{(3)}(\xi)$  und  $Z_{m-1}^{(3)}(\xi)$  lassen sich aber in endlicher Form durch Zylinderfunktionen darstellen. Wenn  $Z_m(\alpha \xi)$  irgend eine Zylinderfunktion ist, so gilt<sup>1)</sup>

$$(107) \left\{ \begin{array}{l} \int \xi \left[ Z_m(\alpha \xi) \right]^2 d\xi = \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ Z_m(\alpha \xi) \right]^2 - Z_{m-1}(\alpha \xi) Z_{m+1}(\alpha \xi) \right\} \\ = \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ Z_m(\alpha \xi) \right]^2 - \frac{2m}{\alpha \xi} Z_m(\alpha \xi) Z_{m-1}(\alpha \xi) + \left[ Z_{m-1}(\alpha \xi) \right]^2 \right\} \\ = \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ Z_m(\alpha \xi) \right]^2 - \frac{2m}{\alpha \xi} Z_m(\alpha \xi) Z_{m+1}(\alpha \xi) + \left[ Z_{m+1}(\alpha \xi) \right]^2 \right\}. \end{array} \right.$$

Setzt man hierin  $\alpha$  gleich der imaginären Einheit  $i$  und für  $Z_m$  die Hankelsche Funktion  $H_m^{(1)}$ , so erhält man mit Rücksicht auf (102) sofort

$$(108) \left\{ \begin{array}{l} Z_m^{(3)}(\xi) = i^{2m+2} \int \xi \left[ H_m^{(1)}(i \xi) \right]^2 d\xi \\ = i^{2m+2} \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ H_m^{(1)}(i \xi) \right]^2 - H_{m-1}^{(1)}(i \xi) H_{m+1}^{(1)}(i \xi) \right\} \\ = i^{2m+2} \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ H_m^{(1)}(i \xi) \right]^2 - \frac{2m}{i \xi} H_m^{(1)}(i \xi) H_{m-1}^{(1)}(i \xi) \right. \\ \quad \left. + \left[ H_{m-1}^{(1)}(i \xi) \right]^2 \right\} \\ = i^{2m+2} \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ H_m^{(1)}(i \xi) \right]^2 - \frac{2m}{i \xi} H_m^{(1)}(i \xi) H_{m+1}^{(1)}(i \xi) \right. \\ \quad \left. + \left[ H_{m+1}^{(1)}(i \xi) \right]^2 \right\} \end{array} \right.$$

oder mit den reellen Funktionen  $G^{(1)}$

$$(108a) \left\{ \begin{array}{l} Z_m^{(3)}(\xi) = \int \xi \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 d\xi \\ = \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 - G_{m-1}^{(1)}(\xi) G_{m+1}^{(1)}(\xi) \right\} \\ = \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 - \frac{2m}{\xi} G_m^{(1)}(\xi) G_{m-1}^{(1)}(\xi) - \left[ G_{m-1}^{(1)}(\xi) \right]^2 \right\} \\ = \frac{\xi^2}{2} \left\{ \left[ G_m^{(1)}(\xi) \right]^2 + \frac{2m}{\xi} G_m^{(1)}(\xi) G_{m+1}^{(1)}(\xi) - \left[ G_{m+1}^{(1)}(\xi) \right]^2 \right\}. \end{array} \right.$$

Sämtliche in dem Energieausdruck (106) vorkommende Integrale verschwinden, wenn  $r = \infty$  wird. Denn aus (74) und (47) ergibt sich, daß jede der Funktionen  $H^{(1)}$  bzw.  $G^{(1)}$ , welchen Index sie auch haben möge ( $m$  oder  $m-1$  oder

1) Jahnke-Emde, 1. c. p. 166.

$m+1$  usw.), mit unendlich wachsendem Argument  $\alpha r = \xi$  wie die Funktion

$$\frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{e^{\xi} \sqrt{\xi}}$$

dem Werte Null zustrebt. Da  $e^{\xi}$  schneller als jede beliebige Potenz von  $\xi$  unendlich wird, so werden auch alle Ausdrücke von der Form

$$\frac{\xi^{\nu} e^{-\xi}}{\sqrt{\xi}} = \frac{\xi^{\nu}}{e^{\xi} \sqrt{\xi}}$$

für  $\xi = \infty$  Null. Daraus folgt, daß die Integrale  $Z_m^{(3)}$  in (108) bzw. (108a) für  $\xi = \infty$  verschwinden, und ebenso auch die außerdem in (106) enthaltene Funktion  $[G_m^{(1)}(\xi)]^2$ . Die untere Grenze  $\alpha' r_1$  der Integrale in (106) darf natürlich nicht Null sein, weil sonst alle Integrale unendlich werden. Da aber  $r_1$  nicht kleiner als der Saitenradius sein kann, so ist diese Bedingung immer erfüllt. Zahlenwerte dieser Integrale lassen sich für  $m = 1$  und  $m = 0$  mittels der Tabb. XIII bzw. XIV in Jahnke-Emdes Formelatafeln berechnen.

#### V. Schluß.

§ 13. Die physikalischen Bedingungen für den Eintritt des strahlenden oder strahlunglosen Zustandes.

Es fragt sich noch, unter welchen physikalischen Bedingungen der reelle oder der imaginäre Wert von  $\alpha$  auftritt. Vorkommen können beide, wie sich zeigen wird, doch ist unter normalen Verhältnissen der imaginäre Wert die Regel.

Gegeben sei eine beiderseits befestigte Saite mit dem Querschnitt  $q$ , der Länge  $l$  und der Dichte  $\varrho_0$ . Die spannende Kraft sei  $P$ , also die Spannung  $P/q$ . Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen auf der Saite ist demnach

$$(109) \quad C = \sqrt{\frac{P}{q \varrho_0}}.$$

Die sekundlichen Eigenfrequenzen der Partialtöne sind

$$(110) \quad N_h = \frac{h C}{2l} = \frac{h}{2l} \sqrt{\frac{P}{q \varrho_0}},$$

wo  $h$  die Ordnungszahl des Partialtons ist;  $h$  ist hier zugleich

die Anzahl der Abteilungen, in denen die Saite schwingt, entspricht also dem  $p$  der bisherigen Rechnungen.

Ist  $N$  die sekundliche Frequenz, mit der die Saite schwingt, und  $p$  die Anzahl der dabei von ihr gebildeten Abteilungen —  $N$  braucht dabei nicht gleich der entsprechenden Eigenfrequenz  $N_p$  zu sein, es kann irgendeine z. B. von außen erzwungene Frequenz sein —, so kann man schreiben

$$(111) \quad \omega = \sqrt{k^2 - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 N^2}{c^2} - \frac{p^2 \pi^2}{l^2}} = \frac{2\pi}{c} \sqrt{N^2 - \frac{p^2 c^2}{4l^2}}.$$

Ist nun die tatsächlich vorhandene Frequenz  $N$  gleich einer Eigenfrequenz  $N_h$ , so wird

$$(112) \quad \omega = \frac{2\pi}{c} \sqrt{N_h^2 - \frac{p^2 c^2}{4l^2}} = \frac{\pi}{lc} \sqrt{h^2 C^2 - c^2}.$$

In der Wirklichkeit hat man immer  $h = p$  anzunehmen. Denn entweder schwingt die Saite frei, führt also Eigenschwingungen aus; dann muß naturgemäß  $h = p$  sein. Oder sie führt erzwungene Schwingungen aus; dann kommt auch nur der Wert  $h = p$  in Betracht, weil nur für ihn kräftige Schwingungen infolge Resonanz stattfinden. Man erhält also in jedem Falle praktisch

$$(113) \quad \omega = \frac{p \pi}{lc} \sqrt{C^2 - c^2},$$

und die Frage, ob  $\omega$  reell oder imaginär ist, wird gleichbedeutend mit der Frage, ob  $C$  größer oder kleiner als  $c$  ist. Die Geschwindigkeit  $c$  in dem Medium hängt nur von dessen Natur und von der Temperatur ab, die Geschwindigkeit  $C$  auf der Saite hauptsächlich von der Spannung  $P/q$ , von der Temperatur nur insofern, als die Dichte  $\rho_0$  eine Funktion derselben ist. Der Einfluß dieses Faktors auf die Saitengeschwindigkeit ist also gering. Durch geeignete Wahl der Gastemperatur und Saitenspannung hat man es innerhalb gewisser Grenzen in der Hand,  $C$  größer oder kleiner als  $c$ , und damit  $\omega$  reell oder imaginär zu machen. Zur Veranschaulichung des Gesagten können die Zahlen der nachstehenden Tabellen dienen. Tab. 1 enthält in den Spalten 2—5 für Saiten von den in den Spaltenköpfen angegebenen Dicken und Querschnitten die Spannungen  $P/q$  in Dyn/qcm, welche zu den in kg-Gew. angegebenen spannenden Kräften der ersten Spalte gehören; diese können etwa

Tabelle 1. Spannende Kräfte  $P$  kg-Gew. und zugehörige Spannungen  $P/q$  Dyn/qem für verschiedene Saitenquerschnitte  $q$ .

$P = 0,801$ kg-Gew.	$2r_1 = 0,1$ cm	$2r_1 = 0,05$ cm	$2r_1 = 0,02$ cm	$2r_1 = 0,01$ cm
	$q = 0,00785$ qem	$q = 0,00196$ qem	$q = 0,000314$ qem	$q = 0,0000785$ qem
	$P/q = 10^8$ Dyn/qem	$P/q = 4 \cdot 10^8$ Dyn/qem	$P/q = 25 \cdot 10^8$ Dyn/qem	$P/q = 100 \cdot 10^8$ Dyn/qem
1,602	$2 \cdot 10^8$	$8 \cdot 10^8$	$50 \cdot 10^8$	$200 \cdot 10^8$
3,205	$4 \cdot 10^8$	$16 \cdot 10^8$	$100 \cdot 10^8$	$400 \cdot 10^8$
20,04	$25 \cdot 10^8$	$100 \cdot 10^8$	$625 \cdot 10^8$	$2500 \cdot 10^8$
40,07	$50 \cdot 10^8$	$200 \cdot 10^8$	$1250 \cdot 10^8$	$5000 \cdot 10^8$
80,1	$100 \cdot 10^8$	$400 \cdot 10^8$	$2500 \cdot 10^8$	$10000 \cdot 10^8$

 Tabelle 2. Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Transversalwellen auf Stahl- und Messingsaiten von der Dicke  $2r_1$  bei den Spannungen der Tab. 1.

$P = 0,801$ kg-Gew.	$2r_1 = 0,1$ cm	$2r_1 = 0,05$ cm	$2r_1 = 0,02$ cm	$2r_1 = 0,01$ cm
	$C = 36 \cdot 10^8$ cm/sec	$C = 72 \cdot 10^8$ cm/sec	$C = 180 \cdot 10^8$ cm/sec	$C = 360 \cdot 10^8$ cm/sec
1,602	$51 \cdot 10^8$	$102 \cdot 10^8$	$255 \cdot 10^8$	$510 \cdot 10^8$
3,205	$72 \cdot 10^8$	$144 \cdot 10^8$	$360 \cdot 10^8$	$(720 \cdot 10^8)$
20,04	$180 \cdot 10^8$	$360 \cdot 10^8$	$(900 \cdot 10^8)$	$(1800 \cdot 10^8)$
40,07	$255 \cdot 10^8$	$510 \cdot 10^8$	$(1275 \cdot 10^8)$	$(2550 \cdot 10^8)$
80,1	$360 \cdot 10^8$	$(720 \cdot 10^8)$	$(1800 \cdot 10^8)$	$(3600 \cdot 10^8)$

$P = 0,801$ kg-Gew.	$C = 34,5 \cdot 10^8$ cm/sec	$C = 69 \cdot 10^8$ cm/sec	$C = 172 \cdot 10^8$ cm/sec	$C = (345 \cdot 10^8$ cm/sec)
	$C = 48,8 \cdot 10^8$	$97,6 \cdot 10^8$	$244 \cdot 10^8$	$(488 \cdot 10^8)$
1,602	$69 \cdot 10^8$	$138 \cdot 10^8$	$(345 \cdot 10^8)$	$(680 \cdot 10^8)$
3,205	$172,5 \cdot 10^8$	$(345 \cdot 10^8)$	$(862,5 \cdot 10^8)$	$(1755 \cdot 10^8)$
20,04	$244 \cdot 10^8$	$(488 \cdot 10^8)$	$(1290 \cdot 10^8)$	$(2440 \cdot 10^8)$
40,07	$(345 \cdot 10^8)$	$(690 \cdot 10^8)$	$(1725 \cdot 10^8)$	$(3450 \cdot 10^8)$
80,1				

durch direktes Anhängen der entsprechenden Gewichtstücke an die Saiten erzeugt werden.

Tab. 2 gibt für dieselben Drahtdicken und Belastungen die mit diesen Spannungen berechneten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten  $C$  an und zwar für Stahldraht (Dichte  $\rho_0 = 7,7$  g/ccm) und Messingdraht ( $\rho_0 = 8,4$  g/ccm). Als Zerreißfestigkeit (Tragkraft) ist nach den Tabellen von Kohlrausch<sup>1)</sup> für Stahl  $250$  kg-Gew./qmm =  $245 \cdot 10^8$  Dyn/qcm, für Messing  $60$  kg-Gew./qmm =  $58,8 \cdot 10^8$  Dyn/qcm angenommen. Diese Zahlen begrenzen also die anwendbaren Spannungen nach oben. Um innerhalb der Elastizitätsgrenze zu bleiben, muß man sich erheblich unter dieser Grenze halten.

Die eingeklammerten Zahlen der Tab. 2 gehören, wie aus Tab. 1 folgt, zu Spannungen, die über die Zerreißspannung der betreffenden Saite hinausgehen. Diese Geschwindigkeiten  $C$  können also nicht verwirklicht werden. Man sieht, daß bei Messingdraht die möglichen Geschwindigkeitswerte alle unter  $250$  m/sec bleiben;  $244$  m/sec ist der höchste in Tab. 2 verzeichnete Wert, und dieser gehört nach Tab. 1 zur Spannung  $50 \cdot 10^8$  Dyn/qcm, die nur wenig unter der Zerreißspannung  $58,8 \cdot 10^8$  Dyn/qcm liegt.<sup>2)</sup> Eine Messingsaite, in Luft schwingend, wird also im allgemeinen den Fall III (imaginäres  $\alpha$ ) ergeben, da  $c$  bei  $0^\circ$   $331$  m/sec beträgt. Nur bei ganz tiefen Temperaturen könnte  $c$  kleiner als  $C$  werden.

Bei Stahlsaiten kann  $C$  größere Werte annehmen, z. B. bei der noch ziemlich weit unter der Zerreißfestigkeit liegenden Spannung  $100 \cdot 10^8$  Dyn/qcm den Wert  $360$  m/sec. Dieser ist größer als die Schallgeschwindigkeit in Luft bei  $20^\circ$  (ca.  $344$  m/sec). Hier würde also Fall I (reelles  $\alpha$ ) verwirklicht sein, erst recht würde das bei tieferen Temperaturen zutreffen. Bei nur wenig geringerer Spannung würde sich aber wieder Fall III ( $\alpha$  imaginär) ergeben. Die praktisch benutzten Spannungen sind bei Stahl von der Größenordnung  $100 \cdot 10^8$  bis  $200 \cdot 10^8$  Dyn/qcm, z. B. bei Klaviersaiten. Zu diesen Spannungen ge-

1) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 11. Aufl. 1910. Tab. 20.

2) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 31. p. 1. 1910, hat allerdings bei Messing höhere Zerreißfestigkeit gefunden, etwa  $89,5$  kg/qmm =  $87,7 \cdot 10^8$  Dyn/qcm, so daß auch höhere Werte von  $C$  vorkommen könnten; sie bleiben aber immer noch unter  $331$  m/sec.

hören bei Stahldrähten von 1 m Länge nach Gleichung (110) Grundtöne von der Frequenz  $N_1 = 180$  bis 255 Schw./sec.

Da die Zugfestigkeit aller anderen in Betracht kommenden Stoffe geringer als die von Messing ist, so sind Stahlsaiten die einzigen, bei denen hiernach  $\alpha$  reell sein kann, wenigstens für Luft als umgebendes Medium. Saiten aus anderen Stoffen, auch nichtmetallischen, wie Darmsaiten, Saiten aus Kautschuk und sonstigen organischen Stoffen ergeben in Luft, außer bei sehr tiefen Temperaturen, nur imaginäre  $\alpha$ ; also sollte bei diesen im stationären Zustand überhaupt keine Ausstrahlung, somit auch keine durch diese Energieabgabe bedingte Dämpfung der Schwingungen vorhanden sein.

Ersetzt man die umgebende Luft durch andere Gase, so rückt der Grenzwert der Saitengeschwindigkeit  $C$ , über dem erst Ausstrahlung stattfinden kann, an andere Stellen; bei leichten Gasen mit großer Schallgeschwindigkeit wird er größer, bei schweren Gasen kleiner. In Wasserstoff ( $c_0 = 1263$  m/sec) können auch Stahlsaiten nicht mehr ausstrahlen. Dagegen würden in Kohlensäure ( $c_0 = 260,5$  m/sec) schon Messingsaiten strahlen können, wenn man sie bis nahe an die Zerreißgrenze — die höhere Schulzesche Zahl dafür vorausgesetzt — belastet, oder das Gas unter  $0^\circ$  abkühlt.

Ob sich der Unterschied zwischen dem nichtstrahlenden Zustand bei schwacher Spannung und dem strahlenden Zustand bei starker Spannung einer und derselben Saite tatsächlich beobachten lässt, hängt in erster Linie davon ab, ob die bei reelem  $\alpha$  vorhandene Strahlungsdämpfung im Verhältnis zu den aus anderen Ursachen (nachgiebiger Befestigung der Saitenenden, innerer Reibung) stammenden Dämpfung hinreichend groß ist, um einen merkbaren Unterschied in der Gesamtdämpfung beim Übergang von einem zum andern Zustand zu erzeugen. Quantitative Beobachtungen über die Dämpfung unter verschiedenen Umständen, aus denen man bindende Schlüsse ziehen könnte, liegen leider nicht vor. Nur solche Versuche könnten überhaupt benutzt werden, bei denen die Voraussetzungen der Theorie einigermaßen erfüllt sind. Eine Saite von endlicher Länge, frei in der Gasatmosphäre ausgespannt, ist dazu nicht ohne weiteres geeignet, denn die

Theorie setzt unendlich lange Saiten voraus. Man muß dann wenigstens mit Oberschwingungen arbeiten, bei denen die Saite in mehreren, am besten in vielen Abteilungen schwingt, so daß das Fehlen der außerhalb der endlichen Saitenlänge gelegenen Stücke der unendlich langen theoretischen Saite nur in der Nähe der Saitenenden störend wirkt; oder besser, man spannt die Saite senkrecht zwischen zwei schallreflektierenden unendlich ausgedehnten Ebenen aus, so daß die beiderseits unendlich fortgesetzten Spiegelbilder der unendlich langen schwingenden Saite die fehlenden Teile ersetzen. In dieser Anordnung sind meines Wissens noch keine Versuche ausgeführt worden.

Eine frei ausgespannte Saite von endlicher Länge strahlt natürlich unter allen Umständen, da für die von den Endteilen derselben ausgehenden Wellen die Interferenz benachbarter Wellen nur einseitig erfolgt. Der strahlungslose stationäre Zustand kann sich also nur vor den mittleren Teilen der Saite im Medium ausbilden. Außerdem findet bei einer endlichen Saite die Strahlung nicht überall senkrecht zur Saitenrichtung statt, es gehen natürlich auch Schallstrahlen in den Raum jenseits der Saitenenden hinaus. Die Schallbewegung und daher auch die Strahlung in diesen Teilen des Raumes ist zwar nur schwach, weil die von der Saite gelieferten Impulse im wesentlichen senkrecht zur Saite erfolgen, also nur kleine Komponenten parallel dazu ergeben; aber wenn die senkrechte Strahlung infolge der gegenseitigen Interferenz ganz verschwindet, so muß diese schwache, nie verschwindende Strahlung doch beachtet werden, durch die die Saitenschwingungen stets gedämpft werden.

Aus Beobachtungen über die Änderung der Schallstärke, die bei allmählicher Änderung der Saitenspannung eintritt, läßt sich nicht leicht ein Schluß auf die Stärke der Strahlung ziehen, denn die Tonstärke an einer Stelle des Raumes mißt nur die daselbst vorhandene, nicht die durchwandernde Energie. Es kann also auch eine stehende Wellenbewegung dieselbe Tonstärke bewirken wie eine fortschreitende. Bei subjektiven Beobachtungen — objektive liegen auch hier nicht vor — stört außerdem der Umstand, daß durch Änderung der Saitenspannung die Tonhöhe geändert wird, und daß bekanntlich die Empfindlichkeit des Ohres mit der Tonhöhe sehr stark variiert.

§ 14. Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Der stationäre Bewegungszustand eines unbegrenzten Mediums in der Umgebung einer transversal schwingenden, unendlich langen Saite und die Energieströmung in demselben werden bestimmt.

2. Es sind zwei verschiedene stationäre Zustände möglich, die sich mathematisch dadurch unterscheiden, daß eine gewisse Größe  $\alpha$ , die im Argument der in dem Geschwindigkeitspotential vorkommenden Zylinderfunktionen enthalten ist, entweder reell oder rein imaginär ist; in dem Übergangsfall ist sie Null.

3. Wenn  $\alpha$  reell ist (Fall I), so sind fortschreitende Wellen vorhanden, ist  $\alpha = 0$  (Fall II) oder imaginär (Fall III), so besteht der stationäre Zustand in einer stehenden Wellenbewegung des ganzen Mediums. In beiden Fällen nimmt die Amplitude der Bewegung nach außen hin ab.

4. Die physikalische Bedeutung der drei Arten von  $\alpha$ -Werten ist folgende: Bei reelem  $\alpha$  ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen auf der Saite, also auch ihre Wellenlänge, größer als die Schallgeschwindigkeit bzw. Wellenlänge in dem Medium; bei imaginärem  $\alpha$  ist sie kleiner, bei  $\alpha = 0$  sind beide gleich groß.

5. Nur bei reelem  $\alpha$  (Fall I) ist eine dauernd von der Saite hinweggerichtete stationäre Energieströmung (Strahlung) möglich. Bei imaginärem und verschwindendem  $\alpha$  pendelt im stationären Zustand die Energie während jeder Periode im Raum hin und her. Nur solange der stationäre Zustand noch nicht erreicht ist, strahlt die Saite Energie in den Raum hinaus.

6. Der gesamte, während des nichtstationären Zustandes ausgestrahlte Energiebetrag, der während des stationären Zustandes unverändert im Raum bleibt, ist im Fall II ( $\alpha = 0$ ) unendlich groß, im Fall III ( $\alpha$  imaginär) endlich. Der stationäre Zustand muß daher im Falle III schon innerhalb endlicher Zeit nach Beginn der Saitenschwingungen praktisch erreicht werden.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule, Juli 1914.

(Eingegangen 11. Juli 1914.)

3. *Über das Verhalten des elektrischen Widerstands von Metallen bei tiefen Temperaturen;*  
*von Hans Schimank.*

(Auszug aus der Berliner Dissertation.)

[Aus dem physikalisch-chemischen Institut der Universität Berlin.]

Inhalt: Einleitung. — Versuchsanordnung und Apparatur. — Einzelergebnisse. — Diskussion der Ergebnisse; Theoretisches. — Zusammenfassung.

Die hohe Bedeutung, die nach allem, was wir bisher darüber wissen, dem Energieinhalt zukommt, läßt es erwünscht erscheinen, durch Herbeischaffung eines möglichst umfangreichen experimentellen Materials zunächst einmal empirische Beziehungen zwischen ihm und irgendwelchen anderen physikalischen Größen aufzusuchen.

Nun hat Nernst<sup>1)</sup> die Beobachtung gemacht, daß der elektrische Widerstand eines Metalles weitgehende Parallelität mit der Kurve des Energieinhalts der gleichen Substanz aufweist, so daß diejenigen Metalle, die bis zu tiefen Temperaturen dem Dulong-Petitschen Gesetz folgen, wie beispielsweise Blei, auch erst spät einen rascheren Abfall des Temperaturkoeffizienten zeigen. Da aber für den Verlauf der spezifischen Wärme nach den Überlegungen von Nernst und Linde-mann, sowie von Debye<sup>2)</sup> der Ausdruck  $\beta_v$  charakteristisch ist, müßten die Widerstandskurven reiner Metalle in der Reihenfolge der  $\beta_v$ -Werte sich anordnen.

Den Nachweis hierfür zu erbringen, war die Hauptabsicht der nachfolgend beschriebenen Untersuchungen.

1) W. Nernst, Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen III. Berl. Ber. 13. p. 311 ff. 1911; F. A. Linde-mann, Untersuchungen über die spezifischen Wärmen bei tiefen Temperaturen IV. Berl. Ber. 13. p. 316 ff. 1911.

2) P. Debye, Zur Theorie der spezifischen Wärmen. Ann. d. Phys. 39. p. 789 ff. 1912.

Des ferneren haben Untersuchungen von H. K. Onnes und J. Clay ergeben, daß schon sehr geringe Verunreinigungen den elektrischen Widerstand bei tiefen Temperaturen stark beeinflussen. Es bestand daher die Möglichkeit, daß auch Strukturverschiedenheiten verunreinigend wirken konnten, was für die Widerstandsthermometrie, die vor anderen Methoden der Temperaturbestimmung manche nicht zu unterschätzende Vorteile besitzt, von Bedeutung sein kann. Es wurden also die Untersuchungen auch auf diese Erscheinung ausgedehnt.

#### Apparatur und Versuchsanordnung.

Folgender Gedanke lag der benutzten Versuchsordnung zugrunde:

Der zu messende Widerstand mußte in die verschiedenen Temperaturbäder eingebraucht werden, um deren konstante Temperatur oder eine wenig davon verschiedene anzunehmen. Auf jeden Fall mußte aber innerhalb sehr enger Grenzen seine Temperatur identisch sein mit der eines Platindrahtes, der als Thermometer diente. Da die unkontrollierbare Widerstandsänderung der Zuleitungen eliminiert werden mußte, ergab sich als einfachste Meßmethode die Bestimmung des Spannungsabfalls in dem betreffenden Drahte.

Es wurden daher eine Stromquelle, ein regulierbarer Vorschaltwiderstand, ein Präzisions-Stöpselrheostat und der zu messende Widerstand in Serie geschaltet. Durch einen Umschalter (Wippe) konnten abwechselnd der zu messende Widerstand und ein passender Teil des Stöpselrheostaten mit einem Galvanometer verbunden werden. Unmittelbar vor der Stromquelle befand sich ebenfalls eine Wippe, die als Kommutator diente. Dicht neben dem zu messenden Widerstand verlief der Draht des Platinthermometers, das in einer Wheatstone'schen Brückenschaltung lag.

Die zu messenden Widerstände, sowie das Platinthermometer, befanden sich im Innern eines Kupferblocks, der den Zweck hatte, etwaige kleine Temperaturdifferenzen in verschiedenen Schichten des Kältebades zum Ausgleich zu bringen, so daß für die Widerstände wie für den Platindraht Temperaturgleichheit angenommen werden durfte.

Das Platinthermometer war folgendermaßen konstruiert:

Ein unten geschlossener Zylinder aus 0,5 mm starkem Silberblech trug an seinem oberen Ende an gegenüberliegenden Stellen kurze Röhrchen aus ganz dünnem Blech, die mit Vulkanfaser ausgefüttert waren. Nachdem die Enden des Platindrahtes durch sie hindurchgeführt waren, wurden sie plattgedrückt, so daß der Draht auf diese einfache Art gut und sicher festgehalten wurde. Der Platindraht war dann auf diese Hülse aufgespult und durch eine dünne Schicht farblosen Lacks von ihr isoliert. Das fertig gewickelte Platinthermometer war dann nochmals mit einem Lacküberzug versehen, um einen etwaigen Kurzschluß durch zufälliges Berühren des Kupferblocks zu verhüten.

An die Enden des Platindrahtes waren Kupferdrähte gelötet, die durch übergezogene Bougieröhren isoliert wurden. Dann folgte jederseits eine kleine Spirale Konstantandrahtes, die einer allzu großen Wärmeleitung von oben her durch die starke Kupferlitze vorbeugen sollte, welche an das andere Ende der Konstantanspiralen gelötet war und die eigentliche Zuleitung zum Widerstandsthermometer bildete.

Geeicht wurde das Thermometer mittels eines Sauerstoffdampfdruckthermometers, dessen Temperaturskala von Hrn. H. v. Siemens<sup>1)</sup> sehr exakt bestimmt worden war, und der von Nernst<sup>2)</sup> aufgestellten Beziehung, nach der

$$w_1 = \frac{w_2 - a}{1 - a}$$

ist, wenn  $w_1$  und  $w_2$  die Widerstände zweier verschiedener Platinthermometer bei gleicher Temperatur bedeuten und  $a$  eine Konstante ist, die man vielleicht als relative Reinheits- oder Homogenitätskonstante bezeichnen könnte. Gemessen wurde also die absolute Temperatur  $T$ , der dazu gehörige Widerstand des zu eichenden Thermometers  $w_2$ , dann wurde aus der von Nernst<sup>3)</sup> angegebenen Tabelle der Widerstand seines Platins bei der gleichen Temperatur berechnet und nun

1) Hermann v. Siemens, Über Dampfdruckmessungen u. Thermometrie bei tiefen Temperaturen. Diss. Berlin 1914 bzw. Ann. d. Phys. 42. p. 871. 1913.

2) W. Nernst, Der Energieinhalt fester Stoffe. Ann. d. Phys. 36. p. 395 ff. 1911.

3) W. Nernst, Ann. d. Phys. 36. p. 405. 1911.

nach der obigen Formel der  $\alpha$ -Wert bestimmt. Mit dem so gefundenen  $\alpha$  wurde dann wiederum durch Umrechnung mit der Nernstschen Formel die Temperatur-Widerstandstabelle für das Platinthermometer aufgestellt.

An dieser Stelle möchte ich gleich auf einige Punkte hinweisen, die für den Bau und die Benutzung von Platinthermometern von Wichtigkeit sind und die gerade hier am natürlichsten ihren Platz finden. Daß für Drähte, die in einen festen Lack gebettet sind, das  $\alpha$ -Gesetz weniger gut zutrifft, hat schon Nernst hervorgehoben, und es wird auch weiterhin noch davon zu sprechen sein. Vorzuziehen sind also stets Thermometer, bei denen der Platindraht möglichst frei beweglich ist, so daß er bei allen Temperaturen ohne Spannung auf seinen Stützen liegt. Wo es sich aber notwendig erweist, den Draht in einen Lack einzubetten — etwa um einen guten thermischen Kontakt zu haben — ist auf die Auswahl des Lackes einige Sorgfalt zu verwenden. Es ist mir zuerst immer wieder begegnet, daß beim Eintauchen des Thermometers in flüssige Luft oder flüssigen Wasserstoff, selbst wenn die Abkühlung ganz langsam und vorsichtig vorgenommen wurde, der Platindraht — wahrscheinlich infolge des verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten des Lacks und des Platins — zerriß, so daß das Widerstandsthermometer neu gewickelt und geëicht werden mußte. Ein farbloser Lack, den Hr. Dr. Eucken auffand, zeigte sich von diesem Mangel frei, so daß bei seiner Benutzung das Thermometer selbst bei sehr jähnen Temperatursprüngen in Ordnung blieb.

Der Widerstand des verwendeten Platinthermometers betrug beim Eispunkt 151,35 Ohm, wovon 0,833 Ohm auf die Zuleitungen entfielen, so daß sich als wirklicher Nullwiderstand 150,52 Ohm ergaben. Da der Hauptwiderstand der Zuleitungen in den beiden Konstantandrähten zu suchen war, konnte er als durchaus konstant in Abzug gebracht werden. Im Laufe der Zeit wies der Eispunktswiderstand geringfügige Veränderungen auf, die aber nur über größere Zeiträume merklich waren und auf die Messungen keinen Einfluß übten, da der Quotient  $w_t/w_0$  konstant blieb.

Wie schon erwähnt, erfolgte die Messung des jeweiligen Widerstandes der zu untersuchenden Drähte nach der Potentialmethode. Es wurden Drahtstücke von 1—2 m Länge auf

Hartgummispulen gewickelt, jederseits mit zwei Zuleitungen versehen — für die Stromzuführung und zur Verbindung mit dem Voltmeter zur Messung des Spannungsabfalls — und dann in die Kapsel des Platinthermometers gesteckt. Meist wurde dieser erste Draht nun durch Paraffin und eine herumgelegte Lage Seidenpapier isoliert und noch ein zweiter Draht aufgespult. In einem Falle war unter gleichen Vorsichtsmaßregeln noch ein dritter Draht aufgewickelt.

In einigen Fällen war es nicht möglich oder auch nicht erwünscht, das zu untersuchende Material in der eben beschriebenen Weise aufzuspulen. Wie in diesen Sonderfällen verfahren wurde, wird an der entsprechenden Stelle angegeben werden.

Was sonstige technische Einzelheiten betrifft, sowohl was die Behandlung der Drähte wie die Benutzung spezieller Hilfsapparate anlangt, so muß deswegen auf die ausführlichere Darstellung in der Dissertation hingewiesen werden.

Als Temperaturbäder wurden die Gemische Wasser-Eis, Kohlensäureschnee-Äther, sowie flüssige Luft und flüssiger Wasserstoff verwendet. Es geschah dies vor allem, weil gute Temperaturkonstanz während eines ziemlich langen Zeitraums erforderlich war. Die Genauigkeit der Temperaturbestimmung mit dem Platinthermometer dürfte auf  $\frac{1}{10}^{\circ}$ , aus dem Siedepunkt des Wasserstoffs auf  $\frac{5}{100}^{\circ}$  anzuschlagen sein.

Die Ausführung und Verwertung der Messungen ging in folgender Weise vor sich:

Der Kupferblock, in dessen Innerem sich das Platinthermometer und die zu untersuchenden Drähte befanden, wurde eventuell unter Anwendung eines Schutzgefäßes in das betreffende Kältebad eingebbracht, und nun in der Wheatstoneschen Brückenanordnung die Widerstandsänderung des Platinthermometers verfolgt. Nachdem der Wert nahezu konstant geworden war, wurde noch einige Zeit gewartet, bzw. durch mehrere Ablesungen geprüft, ob auch der Widerstand des zu untersuchenden Drahtes ein konstanter war. Wenn dies der Fall war, begann die eigentliche Messung.

Zunächst wurde der Widerstand des Platinthermometers, d. h. des Platindrahtes plus der Zuleitung, bestimmt. Nun wurde der Ausschlag bestimmt, den das Spiegelgalvanometer ergab, wenn es an die Enden des zu untersuchenden Drahtes

gelegt war. Durch mehrfaches Kommutieren wurden dabei etwa vorhandene thermoelektrische Kräfte eliminiert, durch entsprechende Variation des Vorschaltwiderstandes im Hauptstromkreise wurde der Bereich der Skala voll ausgenützt. Nun wurde nochmals der Widerstand des Platinthermometers abgelesen, der sich inzwischen um ein geringes geändert hatte, schließlich eine Eichung der Galvanometerskala vorgenommen, indem das Instrument an den Präzisionswiderstand gelegt wurde. Es wurde dabei über einen passenden Teil desselben abgezweigt, so daß der Eichungsausschlag das eine Mal größer, das andere Mal kleiner war als der gemessene. Geschah die Widerstandsbestimmung in einem Bade von flüssigem Wasserstoff, so fand die Temperaturmessung nicht mehr mit dem Platinthermometer statt; der Siedepunkt wurde vielmehr aus der Dampfdrucktabelle des Wasserstoffs und dem herrschenden Barometerstande ermittelt.

Zur besseren Erläuterung ist im folgenden eine Einzelmessung reproduziert.

Widerstand des Platinthermometers und der Zuleitungen

vor der Messung . . . . .	32,090 Ohm
nach der Messung . . . . .	32,100 Ohm
	Mittel 32,095 Ohm
minus Widerstand der Zuleitungen	0,833 Ohm
	$w_t = 31,262$ Ohm
für Platin $\frac{w_t}{w_0} = 0,2079$	
	$T = 80,37$ .

Material: Nickel (Hartmann u. Braun).

Ausschläge des Galvanometers

gelegt an Ni	0,65 Ohm	0,60 Ohm
332,1	338,3	325,6
14,9	7,7	20,2
317,2	330,6	305,4
332,1	338,0	325,7
14,8	7,3	20,2
317,3	330,7	305,5
332,2	338,3	325,6
14,8	7,5	20,3
317,4	330,8	305,3
332,2	338,3	325,6
14,9	7,7	20,2
317,3	330,6	305,4
Mittel 317,3	330,7	305,4

für Nickel  $w_t = 0,6235$

$$\frac{w_t}{w_0} = 0,2904.$$

Bad: flüssige Luft.

In welcher Weise die einzelnen Ablesungen verwertet wurden, geht wohl aus diesem Messungsprotokoll ohne weiteres hervor.

Was die Genauigkeit der Widerstandsbestimmungen anlangt, so dürfte sie im allgemeinen 2 Promille betragen, in einigen ungünstigen Fällen aber bis über  $\frac{1}{2}$  Proz. heraufgehen.

#### Einzelergebnisse.

##### Blei.

Da Blei durch den späten Abfall seines Widerstandskoeffizienten als Thermometer für tiefe Temperaturen besonders geeignet erscheint, so wurden mehrere Drähte in den Kreis der Untersuchung gezogen, die aus gleichem Material auf verschiedene Weise hergestellt waren, bzw. durch die Art ihrer Benutzung sich unterschieden. Hergestellt waren alle drei Drähte, die im folgenden als  $Pb_1$ ,  $Pb_{11}$  und  $Pb_{111}$  unterschieden sind, aus Blei „Kahlbaum“, einem nach den Untersuchungen von Mylius<sup>1)</sup> außerordentlich reinen Material.  $Pb_1$  war durch Kaltziehen in der üblichen Weise mittels gewöhnlicher Zieheisen von mir selbst hergestellt worden,  $Pb_{11}$  hatte der Mechaniker des Instituts durch Spritzen in größerer Menge dargestellt. Bei diesem Verfahren wurde das geschmolzene Material durch eine sehr feine Öffnung gepreßt und lieferte Drähte von beliebiger Feinheit und Länge.  $Pb_1$  und  $Pb_{11}$  waren in der oben beschriebenen Weise aufgespult;  $Pb_{111}$ , das aus gleichem Material und in gleicher Weise ein halbes Jahr später als  $Pb_{11}$  hergestellt wurde, war nicht fest aufgewickelt, sondern längs eines Stückes Glasrohr frei und ohne Spannung befestigt. Es berührte das Rohr nur an den Enden, wo es mit den Zuleitungen verlötet war, die am Rohr mit Isolierband festgebunden waren und es gleichzeitig trugen. Durch Eintauchen in geschmolzenes Paraffin war der Draht sowohl wie

1) Mylius, Reinheitsgrade von Metallen des Handels. Zeitschr. f. anorg. Chem. 74. p. 407 ff.

das Rohr mit einer dünnen Schicht überzogen, die das Metall vor Oxydation schützte und zugleich vortrefflich isolierte.

Bei den Versuchen zeigte sich nun, daß das Blei zwar bis zu sehr tiefen Temperaturen einen noch immer erheblichen Abfall zeigt, zugleich machte sich aber auch der Übelstand bemerkbar, daß der Eispunktwiderstand<sup>1)</sup> kein konstanter war, sondern beständig stieg. Erfreulicherweise hat aber diese Veränderung keinen Einfluß auf den Quotienten  $w_t/w_0$ , so daß man durchaus reproduzierbare Werte erhält, wenn man nach jeder Widerstandsbestimmung bei tiefen Temperaturen sofort eine Bestimmung bei 0° C. anschließt. Ob es sich dabei um Zustandsänderungen des Bleies handelt, oder ob diese Änderungen des Eispunktwiderstandes lediglich durch ein Zurechtrücken des Drahtes auf seiner Unterlage hervorgerufen werden, darüber möchte ich keine Vermutungen aussprechen. Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Änderungen geringer werden, wenn der Draht lange Zeit auf 100° erhitzt wurde.

In der folgenden Tabelle sind nun die beobachteten Werte in der zweiten Spalte angegeben, in der ersten stehen die Temperaturen, in der dritten die „reduzierten“ Werte. Hierüber sowie über die zweite Tabelle wird an anderer Stelle ausführlich zu sprechen sein. Ganz das gleiche wie für die Tabellen des Bleies gilt auch für die der anderen Metalle, so daß sich dort eine nochmalige Erläuterung erübrigen dürfte.

Pb, ( $\beta \nu = 95$ ).

Kalt gezogen;  $w_0 = 4,421$  Ohm;  $w_s = 0,0226$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
197,7	0,7139		0,7073
81,6	0,2762		0,2595
20,2	0,0463		0,0242

1) Vgl. hierzu F. E. E. Germann, Eine Bestimmung der Dampfdruck- und Dichtekurven des Sauerstoffs und Konstruktion eines Apparates zur Bestimmung kritischer Daten. Phys. Zeitschr. 14, p. 857 ff. 1913.

T	beob. v. O. <sup>1)</sup>	berechnet nach	
		$\frac{w_t}{w_0}$	$\alpha$ -Regel
273,09	1,0000	1,0000	0,9951
197,7	0,7062	0,7090	0,7186
81,6	0,2660	0,2637	0,2722
20,2	0,0298	0,0298	0,0298
[ $\alpha = 0,017$ ]			

Pb<sub>II</sub> ( $\beta \nu = 95$ ).

Warm gespritzt;  $w_0 = 7,526$  Ohm;  $w_a = 0,0226$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000	1,0000	
196,9	0,7096	0,7029	
79,6	0,2687	0,2518	
20,2	0,0462	0,0241	
T	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000	1,0000	
196,9	0,7020	0,7045	
76,9	0,2586	0,2562	
20,2	0,0298	0,0298	

[ $\alpha = 0,017$ ]

Pb<sub>III</sub> ( $\beta \nu = 95$ ).

Warm gespritzt; gerade und ohne Spannung befestigt.

$w_0 = 2,949$  Ohm;  $w_a = 0,0226$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000	1,0000	
197,4	0,7111	0,7044	
82,5	0,2821	0,2655	
20,2	0,0456	0,0235	
T	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000	1,0000	
197,4	0,7049	0,7063	
82,5	0,2691	0,2701	
20,2	0,0298	0,0298	

[ $\alpha = 0,0163$ ]

1) J. Clay, Der galvanische Widerstand von Metallen und Legierungen bei tiefen Temperaturen. Jahrb. f. Rad. u. Elektr. 8. p. 888 ff. 1911.

2) F. A. Lindemann, Unters. über d. spez. Wärme bei tiefen Temperaturen IV. Berl. Ber. 13. p. 416 ff. 1911.

Cadmium.

Auch beim Cadmium, das ebenfalls von Kahlbaum bezogen war und für dessen Reinheit Ähnliches gilt wie für Blei, gelangten zwei Drähte zur Untersuchung, ein gezogener und ein gepreßter. An diesem Material wurden die Untersuchungen angestellt und dabei auch der Versuch gemacht, in einfacher Weise Zwischentemperaturen zwischen dem Eispunkt und dem Kohlensäure-Ätherbad, sowie zwischen diesem und der Siedetemperatur der flüssigen Luft herzustellen.

Zu diesem Behuf wurden auf das untere halbkugelförmige Ende des Kupferblocks federnde und gut anliegende Messingkapseln geschoben, an deren unterem Ende eine kleine Schraubenmutter angelötet war. In diese konnten nun verschiedene lange Stäbe aus Messing, Kupfer oder Eisen von etwa 2 mm Durchmesser eingeschraubt werden. Dadurch, daß diese verschieden tief in das Temperaturbad eintauchten, entstand in ihnen ein verschieden starkes Temperaturgefälle und die Temperatur des Kupferblocks lag demzufolge mehr oder weniger hoch über der des Bades. Dabei sank seine Temperatur anfangs schnell, später langsamer, erreichte einen tiefsten Punkt und begann dann kontinuierlich wieder zu steigen, weil sich durch Verdunstung der Spiegel der Flüssigkeit bzw. des Kohlensäure-Äthergemisches allmählich senkte. Wurde nun in der Gegend des Umkehrpunktes beobachtet, so blieb die Temperatur während der Zeit einer Beobachtung leidlich konstant. Es war aber dazu die Anwendung eines Siemens & Halskeschen Millivoltmeters notwendig, das eine wesentlich kürzere Einstellungsdauer aufwies als das Spiegelgalvanometer; auch konnte nur einmal kommutiert werden, so daß eine Erhöhung der Meßgenauigkeit durch Häufen der Beobachtungen nicht möglich war. Es wurde deshalb in der Folge von der Anwendung dieses Verfahrens Abstand genommen. Als fünftes konstantes Bad gelangte bei diesen Messungen auch noch flüssiger Sauerstoff zur Verwendung, der zuvor zur Bestimmung des  $\alpha$ -Wertes des Platinthermometers benutzt worden war.

Cd<sub>I</sub> ( $\beta \nu = 136$ ).Kalt gezogen;  $w_0 = 2,478$  Ohm;  $w_a = 0,0125$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
227,8	0,8203		
(226,4	0,8167)		
(202,3	0,7211)		
200,6	0,7149		0,7113
182,1	0,6434		
(180,4	0,6370)		
163,6	0,5742		
(161,5	0,5656)		
133,9	0,4949		
90,0	0,2872		0,2782
(82,9	0,2594)		
82,7	0,2584		0,2490
20,2	0,0232		0,0108

Die fünf Werte, die in den Bädern selbst gemessen wurden, sind sowohl in dieser wie in der folgenden Tabelle durch Unterstrichen hervorgehoben. Die eingeklammerten Zahlen sind für den Vergleich mit Cd<sub>II</sub> durch Interpolation auf die gleiche Temperatur umgerechnet wie die entsprechenden Werte von Cd<sub>II</sub>.

Cd<sub>II</sub> ( $\beta \nu = 136$ ).Warm gespritzt;  $w_0 = 2,049$  Ohm;  $w_a = 0,010$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000	1,0000
226,4	0,8137			0,8164
202,3	0,7200		0,7173	0,7206
180,4	0,6376			0,6365
161,5	0,5644			0,5959
133,9	0,4637			0,4641
90,0	0,2860		0,2788	0,2862
82,9	0,2581		0,2506	0,2583
20,2	0,0217		0,0117	0,0218

[ $\alpha = 0,0014$ ]

## Gold.

Die untersuchten Golddrähte waren von W. C. Heraeus in Hanau bezogen, und zwar war die eine Sorte chemisch

reines Metall, die andere das gewöhnliche Handelsmetall. Angaben über den Reinheitsgrad des chemisch reinen Metalls waren nicht zu erlangen. Das Handelsmetall war laut Angabe der deutschen Gold- und Silberscheideanstalt auf elektrolytischem Wege gewonnen und sollte einen Feingehalt von 99,99 Proz. besitzen. Von jedem Draht wurde ein Teil in unausgeglühtem Zustande untersucht, der andere Teil wurde in Wasserstoff unter verminderter Druck vorher ausgeglüht. Es verdient vielleicht auch erwähnt zu werden, daß sowohl diese vier Golddrähte wie auch die beiden Silberdrähte, über die noch zu sprechen sein wird, aus demselben Material waren wie die Gold- und Silberdrähte, deren thermoelektrische Kraft gegeneinander Hr. G. Wietzel<sup>1)</sup> untersucht hat.

**Au<sub>I</sub> ( $\beta \nu = 180$ ).**

Chemisch rein; ausgeglüht;  $w_0 = 1,021$  Ohm;  $w_a = 0,0115$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
195,5	0,7005		0,6970
80,7	0,2383		0,2294
20,2	0,0188		0,0074

$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
195,5	0,6963		0,6973
80,7	0,2319		0,2300
20,2	0,0081		0,0081

$[\alpha = 0,0108]$

**Au<sub>II</sub> ( $\beta \nu = 180$ ).**

Chemisch rein; unausgeglüht;  $w_0 = 0,7317$  Ohm;  $w_a = 0,0220$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
195,3	0,7011		0,6944
80,4	0,2463		0,2293
20,2	0,0291		0,0073

1) G. Wietzel, Über das thermoelektrische Verhalten der Metalle bei tiefen Temperaturen. Dissertation, Berlin 1913, und Ann. d. Phys. 43. p. 605. 1914.

$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $a$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
195,3	0,6955		0,6946
80,4	0,2305		0,2300
20,2	0,0081		0,0081

$[a = 0,0212]$

$\text{Au}_{\text{III}}$  ( $\beta \nu = 180$ ).

Handelsmetall; ausgeglüht;  $w_0 = 1,327$  Ohm;  $w_a = 0,0148$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
195,5	0,6978		0,6933
81,0	0,2436		0,2322
20,2	0,0221		0,0074

$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $a$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
195,5	0,6961		0,6935
81,0	0,2331		0,2328
20,2	0,0081		0,0081

$[a = 0,0141]$

$\text{Au}_{\text{IV}}$  ( $\beta \nu = 180$ ).

Handelsmetall; unausgeglüht;  $w_0 = 0,4944$  Ohm;  $w_a = 0,0270$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
195,2	0,7055		0,6980
80,5	0,2506		0,2300
20,2	0,0341		0,0073

$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $a$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
195,2	0,6951		0,6976
80,5	0,2308		0,2304
20,2	0,0081		0,0081

$[a = 0,0262]$

Silber.

Das Silber war ebenfalls von W. C. Heraeus als chemisch rein bezogen. In der gleichen Weise wie beim Gold wurde ein Teil in ausgeglühtem, der andere in unausgeglühtem Zustande untersucht.

Ag<sub>I</sub> ( $\beta \nu = 215$ ).Chemisch rein; ausgeglüht;  $w_0 = 0,8863$  Ohm;  $w_a = 0,0068$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
197,2	0,6992		0,6971
87,0	0,2402		0,2350
20,2	0,0146		0,0079
$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
197,2	0,6943		0,6974
87,0	0,2360		0,2356
20,2	0,0089		0,0089

[ $\alpha = 0,0058$ ]Ag<sub>II</sub> ( $\beta \nu = 215$ ).Chemisch rein; unausgeglüht;  $w_0 = 1,484$  Ohm;  $w_a = 0,0155$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
195,5	0,6943		0,6895
80,3	0,2201		0,2077
20,2	0,0231		0,0077
$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_0}$	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
195,5	0,6877		0,6898
80,3	0,2073		0,2089
20,2	0,0089		0,0089

[ $\alpha = 0,0148$ ]

## Zink.

Auch das Zink war von Kahlbaum bezogen und später durch Spritzen in Drahtform gebracht. Es erwies sich als ein sehr schwieriges und widerspenstiges Material, so daß es trotz mehrmaliger Versuche nicht gelang, an ein und demselben Draht eine volle Versuchsreihe durchzumessen. Die Drähte rissen zum Teil schon beim Abkühlen im Kältebad, zum Teil auch nach einem Verweilen darin. Offenbar erleidet das Metall sehr starke Strukturveränderungen, was auch nicht so besonders verwunderlich erscheint, wenn man bedenkt, daß gerade das Zink eine ausgesprochen kristallinische Struktur besitzt, so daß es ohne Erwärmen überhaupt nicht zu Draht

gezogen werden kann. Da es aber in einem Falle wenigstens gelang, den Widerstand eines Zinkdrahtes für drei Temperaturpunkte (Eis, flüssige Luft, flüssigen Wasserstoff) festzulegen, so ist diese Tabelle im folgenden reproduziert. Der in Klammern gesetzte Wert ist an einem ganz anderen Material bestimmt, das gleich in Drahtform von E. de Haen in Selze geliefert wurde. Da es aber in diesem Zustande einen Durchmesser von 0,5 cm aufwies, wurde es erst noch bis auf eine geeignete Stärke — etwa 0,2 mm — ausgezogen. Über diese kombinierte Tabelle wird auch noch an anderer Stelle zu sprechen sein.

Zn ( $\beta \nu = 215$ ).

Warm gespritzt;  $w_0 = 1,828$  Ohm,  $w_a = 0,0080$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000	1,0000	
(195,3)	0,6982	0,6960	
82,0	0,2185	0,2121	
20,2	0,0154	0,0074	

In der jetzt folgenden Vergleichstabelle ist umgerechnet auf das Silber von H. K. Onnes, mit welchem auch die gemessenen Silberdrähte verglichen wurden. Dieses Verfahren wird an späterer Stelle seine Rechtfertigung finden.

$T$	beob. v. O.	$\frac{w_t}{w_a}$	ber. m. $\alpha$ -Regel
273,09	1,0000		1,0000
(195,3)	0,6871		0,6962)
82,0	0,2144		0,2134
20,2	0,0089		0,0089

[ $a = 0,0066$ ]

Die Diskrepanz zwischen dem von Onnes beobachteten und dem umgerechneten Wert des Haenschen Zinks, zu dem ein ganz anderer  $\alpha$ -Wert gehören würde, fällt sofort auf.

#### Kupfer.

Der Kupferdraht, der zur Untersuchung gelangte, war mir von der Firma Leppin & Masche in liebenswürdiger Weise zur Verfügung gestellt, wofür ich an dieser Stelle nochmals meinen Dank aussprechen möchte. Laut Angabe war er aus Stücken einer Kathode hergestellt, die mit dem Magneten als diamagnetisch ausgesucht waren. Von 0,3 mm an abwärts war

er durch Steine gezogen und hatte dabei eine magnetische Oberflächenschicht bekommen, die mit warmer verdünnter Schwefelsäure entfernt wurde. Er schloß sich dabei ganz vorzüglich an einen von Hrn. Prof. Nernst untersuchten Kupferdraht an, wie dies nachfolgende Tabelle beweist.

Cu ( $\beta \nu = 325$ ).

$w_0 = 0,0169$  Ohm,  $w_a = 2,062$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
195,2	0,6662		0,6605
80,2	0,1578		0,1433
20,2	0,0177		0,0008

$T$	beob. v. Nernst	$\frac{w_t}{w_0}$	mit $\alpha$ -Regel umger. zu obiger Tabelle
273,09	1,0000		1,0000
80,2	0,1577		0,1580
79,0	0,155		0,1553
66,5	0,1033		0,1037
22,0	0,0176		0,0180
20,2	0,0173		0,0177

$[\alpha = 0,0004]$

#### Kobalt.

Das untersuchte Kobalt war in Blechform von den Vereinigten Nickelwerken bezogen. Mit der Schere wurde dann längs des Randes ein schmaler Streifen abgeschnitten, der sich schon hierbei spiraling aufrollte. Da er sehr spröde war, wurde er vorsichtig über ein Glasrohr gezogen und dann mit den Zuleitungen verlötet, die nach der nötigen Isolation fest auf das Glasrohr aufgebunden waren. An ein Einbringen in das Innere des Kupferblocks war in diesem Falle natürlich nicht zu denken. Der Block und das Kobaltband wurde daher stets dicht nebeneinander in die Bäder gehängt.

Co ( $\beta \nu = 401$ ).

$w_0 = 0,8869$  Ohm;  $w_a = 0,389$  Ohm.

$T$	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000		1,0000
198,4	0,7500		0,5908
81,8	0,4603		0,1167
20,2	0,38920		0,0049

## Nickel.

Das Nickel war direkt in Drahtform von Hartmann & Braun bezogen.

Ni ( $\beta \nu = 406$ ).

$w_0 = 2,147$  Ohm;  $w_a = 0,198$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000	1,0000	
195,4	0,6722	0,5902	
80,4	0,2904	0,1181	
20,2	0,2046	0,0057	

## Eisen.

Das Eisen wurde als hochgradig reines Elektrolyteisen von Kahlbaum bezogen und dann zu Heraeus nach Hanau geschickt, wo es zu Draht ausgezogen wurde. Durch das Ziehen war ein außerordentlich elastischer Draht entstanden, von dem ein Stück in diesem Zustande zur Untersuchung gelangte, während ein anderes Stück zuvor in einer Stickstoffatmosphäre ausgeglüht wurde.

Fe<sub>I</sub> ( $\beta \nu = 413$ ).

Ausgeglüht;  $w_0 = 3,342$  Ohm;  $w_a = 0,027$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000	1,0000	
197,8	0,6130	0,6024	
80,6	0,1033	0,0785	
20,4	0,0280	0,0010	

Fe<sub>II</sub> ( $\beta \nu = 413$ ).

Unausgeglüht;  $w_0 = 2,614$  Ohm;  $w_a = 0,032$  Ohm.

T	beob.	$\frac{w_t}{w_0}$	reduz.
273,09	1,0000	1,0000	
198,3	0,6148	0,6021	
80,6	0,1088	0,0794	
20,4	0,0330	0,0011	

## Konstantan.

Schließlich wurde noch ein Stück des Konstantandrahtes untersucht, aus dem ein Teil der Zuleitungen zum Platinthermometer bestand, um die eventuelle Korrektur, die bei

der Temperaturmessung in flüssiger Luft beziehungsweise im Kohlensäure-Äthergemisch anzubringen war, zu ermitteln. Der gefundene Abfall des Widerstandes ist geringer als beim Konstantan, das Kamerlingh Onnes untersuchte.

Konstantan.

$$w_0 = 2,847 \text{ Ohm.}$$

$T$	$\frac{w_t}{w_0}$
273,09	1,0000
196,7	0,9982
87,3	0,9898
20,2	0,9784

Diskussion der Ergebnisse. Theoretisches.

Es erhebt sich jetzt die Frage, was mit den erhaltenen Zahlen anzufangen sei, welche und wie weit gehende Folgerungen man aus ihnen ziehen darf. Das gegebene Hilfsmittel dazu ist die graphische Darstellung und dementsprechend sind auch in der ersten der folgenden Tafeln die Widerstandskurven gezeichnet, wie sie sich nach den Messungen ergeben würden.

Es sind also die absoluten Temperaturen als Abszissen und die  $\frac{w_t}{w_0}$ -Werte als Ordinaten eines orthogonalen Koordinatensystems aufgetragen und die so erhaltenen Punkte durch einen fortlaufenden Kurvenzug verbunden. Daß dabei eine gewisse Willkür walten kann, ist nicht in Abrede zu stellen, aber da der ganze Charakter der Kurven nach den sehr exakten Messungen von H. Kamerlingh-Onnes<sup>1)</sup> und den theoretischen Betrachtungen von W. Nernst und F. A. Lindemann<sup>2)</sup> als bekannt vorausgesetzt werden kann, so ist der Spielraum, der hierfür gelassen wird, kein allzu großer.

Um die Tafel nicht allzu unübersichtlich zu machen, sind außerdem nicht alle Kurven aufgetragen, sondern nur je eine für jedes Metall. Ganz am obersten Rande der Tafel verläuft die Konstantankurve, ungefähr von der Gestalt eines einseitig

1) J. Clay, I. c.; H. K. Onnes, The resistance of platinum at helium temperatures. Comm. Leiden No. 119 b. 1911.

2) F. A. Lindemann, Berl. Ber., I. c.

belasteten Stabes, und man bemerkt, wie im Gebiete des flüssigen Wasserstoffs schon die ersten Anzeichen eines stärker werdenden Abfalls auftreten. Nun folgen der Reihe nach die Kurven des Co, Ni, dann weit tiefer des Pb<sub>III</sub>, des Fe, und Cd, schließlich dicht beieinander Au, Cu, Zn und Ag. Vielfach treten dabei Überschneidungen auf, und die Verhältnisse würden sich noch mehr komplizieren, wenn sämtliche 18 Kurven aufgetragen wären. Auch lehrt eine Betrachtung des Zahlenmaterials, daß die Reinheit des Metalls, wie schon H. K. Onnes<sup>1)</sup> gezeigt hat, offenbar aber auch die Struktur von Einfluß auf den Verlauf der Widerstandskurve ist. In dieser Form ist jedenfalls wenig mit dem Material anzufangen. Man muß sich also nach einer Darstellungsweise umsehen, die die Zufälligkeiten der Strukturverschiedenheit und des Reinheitsgrades möglichst ausschaltet, trotzdem aber naturwissenschaftliche Wahrscheinlichkeit besitzt.

Da kommen nun zwei Erfahrungen zu Hilfe, die wir wiederum H. K. Onnes und W. Nernst verdanken, und durch die gleichzeitige Benutzung beider Fakta scheint eine Art der Darstellung möglich, die den oben gestellten Anforderungen genügt. Zunächst ist aber zu erläutern, auf welche Phänomene wir abzielen.

H. K. Onnes hat durch eine große Reihe sorgfältig durchgeführter Untersuchungen speziell an Golddrähten<sup>2)</sup> es wahrscheinlich gemacht, daß die Widerstandskurven sich mit zunehmender Reinheit mehr und mehr der Temperaturachse nähern, wenn man sich der oben benutzten Art ihrer graphischen Darstellung bedient. Ob bei absoluter Reinheit schließlich ein Tangieren der Temperaturachse eintritt oder ob sie nur einem sehr kleinen aber doch endlichen Werte des Widerstandes zustreben, darüber läßt sich beim augenblicklichen Stande der Dinge gar nichts sagen. Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden annehmen, daß bei absoluter Reinheit ein Tangieren eintreten würde; erweist sich künftig die zweite Annahme als richtig, so wird trotzdem an den folgenden Schlüssen praktisch nichts anders. Auch in welcher

1) H. K. Onnes, Comm. Leiden 119b. 1911; Jahrb. f. Radioakt. 84. p. 3. 1911.

2) J. Clay, l. c.

Weise die Annäherung an die Temperaturachse erfolgt, ist uns unbekannt. Es wird vielmehr Aufgabe der künftigen experimentellen Forschung sein, zu ermitteln, ob auch hier ein  $T^a$ -Gesetz gilt wie für die spezifische Wärme fester Körper<sup>1)</sup> oder welches andere sonst. Jedenfalls wird durch die Onneschen Versuche der Satz gestützt: Die Widerstandsvergrößerung infolge von Verunreinigungen kann in erster Annäherung als rein additive Größe betrachtet werden. Diese vorsichtige Formulierung scheint geboten, weil die Nernstsche  $a$ -Regel, über die gleich ausführlich zu sprechen ist, vermutlich nur den vereinfachten Fall eines allgemeinen Gesetzes darstellt, das für das Verhalten der Legierungen maßgebend ist.

Bei geringer Verunreinigung darf man jedenfalls von der additiven Größe des Zusatzwiderstandes sprechen und gelangt dann, wie Nernst gezeigt hat, zu einer Formel, die es ermöglicht, Widerstandskurven, welche an gleichem Material von verschiedener Reinheit gemessen sind, aufeinander umzurechnen. Diese Formel ist der schon anfangs erwähnte Ausdruck

$$w_1 = \frac{w_0 - a}{1 - a}.$$

Die Bedeutung, die diese Formel beanspruchen darf, selbst wenn sie nur in guter Annäherung gilt, tritt ohne weiteres zutage. Sie bedeutet nicht nur ein wertvolles Hilfsmittel bei der Thermometrie tiefer Temperaturen, sondern sie verschafft uns auch die Möglichkeit, uns von den Zufälligkeiten der untersuchten Drähte frei zu machen. Während also bisher nur konstatiert werden konnte, daß für gleiche Temperaturen das von Onnes benutzte Platin kleinere Werte des Quotienten  $w_1/w_0$  aufwies als etwa das Dewarsche, wird es nunmehr möglich, nachzuprüfen, ob die Kurven beider Beobachter nahezu miteinander übereinstimmen, oder ob an irgend einer Stelle Rechnungs- beziehungsweise Beobachtungsfehler unterlaufen sind.

Um nun klar zu machen, innerhalb welcher Grenzen die

1) A. Eucken und F. Schwers, Eine experimentelle Prüfung des  $T^a$ -Gesetzes für den Verlauf der spezifischen Wärme fester Körper bei tiefen Temperaturen. Verhdl. Phys. Ges. 15. p. 578 ff. 1913.

$\alpha$ -Regel in verschiedenen Fällen Gültigkeit beanspruchen darf, wollen wir sie zunächst einer Prüfung unterziehen, zu der sowohl die Resultate der Messungen von Dewar und von Kamerlingh Onnes und Clay, wie auch die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit als Material dienen.

Schon Nernst hat in der eben zitierten Arbeit eine Tabelle gegeben, die durch Reduktion zweier Platinsorten aufeinander mittels der  $\alpha$ -Regel erhalten wurde. Wir reproduzieren hier zunächst die Resultate der Umrechnung verschiedener Goldsorten von H. K. Onnes auf das reinste Material, das diesem Forscher vorlag. In der ersten Kolumne stehen die absoluten Temperaturen, in der zweiten die an  $\text{Au}_V$  beobachteten Werte des Widerstandes. Die folgenden Spalten enthalten Werte, die durch Umrechnung der beobachteten Werte anderer Goldsorten auf  $\text{Au}_V$  mittels der  $\alpha$ -Regel sich ergeben. Die Größe von  $\alpha$  ist dabei jedesmal oberhalb der betreffenden Spalte vermerkt.

T	$\text{Au}_V$	$\text{Au}_{\text{III}}$	$\text{Au}_{\text{IV}}$	$\text{Au}_0$	$\text{Au}$	
					2,55 Vol.-Proz. Ag	$a = 0,2933$
			$a = 0,00796$	$a = 0,00098$	$a = 0,0377$	
273,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
169,3	0,5931	0,5927	0,5935	0,5900	0,5957	
90,1	0,2710	0,2707	0,2711	0,2733	0,2809	
75,2	0,2087	0,2083	0,2089	0,2092		
68,1	0,1790			0,1789		
57,8	0,1334	0,1337	0,1332	0,1341	0,1408	
20,2	0,0081	0,0081	0,0081	0,0081	0,0081	
14,3	0,0036	0,0030	0,0033	0,0021		

Man ersieht aus dieser Tabelle deutlich, daß nur dann eine befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erwarten ist, wenn  $\alpha$  klein gegen eins ist, eine Tatsache, die ja schon Nernst nachdrücklich hervorgehoben hat. Mit zunehmendem  $\alpha$  werden die Abweichungen immer bedeutender und betragen im letzten Fall sogar zwei bis drei Grad. Wie wertvoll aber selbst dann noch diese  $\alpha$ -Regel werden kann, möchte ich durch ein hübsches Beispiel illustrieren, auf das ich während dieser Umrechnungen gestoßen bin.

Rechnet man ganz analog wie in der obigen Tabelle  $\text{Au}_{\text{VI}}$  auf  $\text{Au}_V$  um, so zeigt der Wert bei  $T = 57,8$  eine ganz außer-

ordentliche Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung und noch dazu im umgekehrten Sinn, wie er sie eigentlich haben müßte. Eine Umrechnung aus einer Goldsilberlegierung, die mit kleinem  $\alpha$ -Werte, also einiger Genauigkeit erfolgen kann, zeigt tatsächlich, daß an dieser Stelle ein Fehler vorliegen muß, und liefert einen Wert, der besser übereinstimmt. Die nötigen Zahlen finden sich nachfolgend zusammengestellt.

T	Au <sub>VI</sub>	Au <sub>V</sub>	Au <sub>VI</sub> umger.	Au	Au <sub>VI</sub>	Au <sub>VI</sub> berech.	
					0,726 Vol. Proz. Ag	aus Au/Ag red. auf Au <sub>V</sub>	$\alpha = 0,00324$
273,1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	$\alpha = 0,1296$
169,3	0,6483	0,5931	0,5959	0,6455	0,6443	0,5914	
90,1	0,3705	0,2710	0,2768	0,3708	0,3688	0,2747	
57,8	0,1682	0,1334	0,0443	0,2538	0,2514	0,1398	
20,2	0,1367	0,0081	0,0081	0,1395	0,1367	0,0081	

Dieses Beispiel sowie einige andere, die in der Dissertation mitgeteilt sind, zeigen, welche Bedeutung die  $\alpha$ -Regel für die Kritik von Widerstandsmessungen beanspruchen darf.

Zur Berechnung des  $\alpha$ -Wertes ist stets der Siedepunkt des Wasserstoffs als Vergleichstemperatur gewählt worden. Ebenso verfuhr ich auch bei der Umrechnung meiner eigenen Widerstandswerte auf die an den gleichen Metallen von H. K. Onnes gemessenen Widerstände. Es ergeben sich dann die Tabellen, wie sie im Vorangehenden bei den entsprechenden Metallen unterhalb der eigentlichen Resultate stehen. Sie enthalten in der ersten Spalte die absoluten Temperaturen, in der zweiten die Zahlen von H. K. Onnes, in der dritten schließlich die mittels der  $\alpha$ -Regel umgerechneten eigenen Werte. Eine vierte Spalte, die sich in der Tabelle für Pb, noch befindet, enthält die Zahlen, die sich aus der Linde-mannschen Formel ergeben. Sie soll einen Vergleich zwischen der Genauigkeit dieses Ausdruckes und der  $\alpha$ -Regel ermöglichen. Die  $\alpha$ -Werte, mittels deren die Umrechnung vorgenommen ist, sind unterhalb der Tabellen angegeben.

Zur rascheren Übersicht möge hier auch noch eine kleine Zusammenstellung Platz finden, die die Abweichung in Graden angibt, welche zwischen den von Onnes beobachteten und den aus meinen Zahlen umgerechneten Werten besteht. Vermerkt ist immer, um wieviel höher die Temperatur sein müßte,

damit die umgerechneten Werte identisch würden mit denen von Onnes.

Abweichungen

	Pb <sub>I</sub>	Pb <sub>II</sub>	Pb <sub>III</sub>	Au <sub>I</sub>	Au <sub>II</sub>	Au <sub>III</sub>	Au <sub>IV</sub>	Ag <sub>I</sub>	Ag <sub>II</sub>	Zn
Kohlen-										
säure-	-0,7	-0,6	-0,33	-0,25	+0,25	-0,66	-0,5	-0,7	-0,5	-
Äther										
flüssige	+0,7	+0,6	+0,33	+0,5	+0,1	+0,05	+0,1	+0,07	+0,33	+0,25
Luft										

Was schließlich die gute Übereinstimmung beim Cadmium anlangt, so ist diese nicht weiter verwunderlich, da beide Drähte aus demselben Stück Metall durch Ziehen beziehungsweise Spritzen hergestellt sind. Auch für Pb<sub>I</sub> und Pb<sub>II</sub>, die aus ein und demselben Stück stammen, ergibt sich diese gute Übereinstimmung, wenn man sie mittels des Differentials der  $\alpha$ -Regel<sup>1)</sup>

$$\frac{d w_1}{dt} = \frac{1}{1 - a} \frac{d w_2}{dt}$$

auf gleiche Temperaturen umrechnet.

Aus diesem speziellen Fall ergeben sich dann die Zahlen nachfolgender Aufstellung:

T	Pb <sub>I</sub>	Pb <sub>II</sub>	Pb <sub>I</sub> —Pb <sub>II</sub>
273,1	1,0000	1,0000	0,0000
197,7	0,7139	0,7127	+0,0012
81,6	0,2762	0,2758	+0,0004
20,2	0,0463	0,0462	+0,0001

Daß jetzt eine Umrechnung vortreffliche Übereinstimmung ergeben würde, ist ohne weiteres ersichtlich.

Betrachten wir nochmals zusammenfassend alles, was sich aus den angeführten Zahlen für die Anwendbarkeit der  $\alpha$ -Regel ergibt, so finden wir:

Die Genauigkeit der  $\alpha$ -Regel wächst mit abnehmendem  $a$ . Sie trifft exakter zu für freihängende Drähte als für solche, die irgendwie fest gebettet sind (vgl. Pb<sub>II</sub> und Pb<sub>III</sub>). Die Fehler der Temperaturmessung betragen unter diesen Umständen ein bis zwei Zehntelgrade.

Wo es notwendig ist, mit Widerstandsthermometern zu arbeiten, die in einen festen Lack eingebettet sind, empfiehlt

1) W. Nernst, Ann. d. Phys. I. c.

es sich, den  $\alpha$ -Wert des Drahtes bei mehreren gut definierten Temperaturen zu bestimmen. Stellt man dann die gefundenen Werte als Funktion der Temperatur graphisch dar, so kann man aus dem erhaltenen Kurvenzug auch für andere Temperaturen die entsprechenden  $\alpha$ -Werte interpolieren.<sup>1)</sup> Solcherart erreicht man auch bei fest gebetteten Drähten eine bessere Übereinstimmung als mit der unkorrigierten  $\alpha$ -Regel.

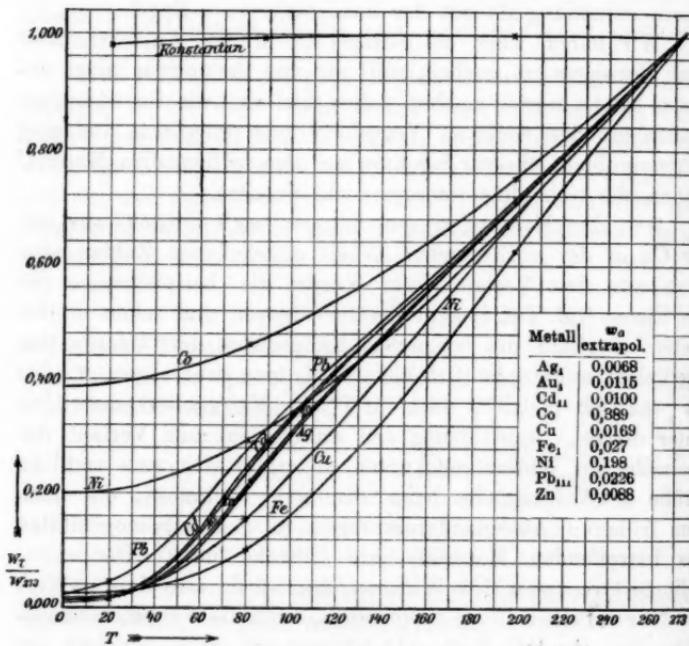
Wir haben über die  $\alpha$ -Regel in breiter Ausführlichkeit auch deswegen gesprochen, weil wir von ihr noch in einer anderen Art Gebrauch machen wollen und weil wir die wichtigste Maßnahme des weiteren Vorgehens erst möglichst vielseitig prüfen mußten, ehe wir Schlüsse aus dem vorliegenden Material ziehen, die sich ohne weiteres nicht ergeben.

Aus den Messungen von Kamerlingh Onnes, aus den für Cu in der vorliegenden Arbeit angegebenen Zahlen oder auch aus dem Verlauf einer Kurve wie beispielsweise der des Eisens (vgl. Taf. I) geht deutlich hervor, daß schon in Gebieten oberhalb des absoluten Nullpunktes der Temperaturkoeffizient außerordentlich klein wird, man kann sagen,  $dw/dt$  ist praktisch gleich 0 auch für  $T > 0$ . Extrapoliert man aber unter dieser Voraussetzung den wahrscheinlichen Verlauf der beobachteten Widerstandskurven, so ergibt sich eine endliche Größe des Widerstandes beim absoluten Nullpunkt, die nach den früheren Auseinandersetzungen in den Inhomogenitäten des betreffenden Materials ihre Ursache hätte. Der extrapolierte Grenzwert des Widerstandes würde also dem  $\alpha$ -Wert der Nernstschen Regel entsprechen, wenn die Vergleichstemperatur der absolute Nullpunkt ist und auf ideale Reinheit des Materials reduziert würde. In den Tabellen ist nun dieser extrapolierte Wert als  $w_a$  angegeben. Rechnet man nun die beobachteten Werte nach der  $\alpha$ -Regel ( $\alpha = w_a$ ) um, so ergeben sich die Zahlenreihen, die als „ $w_t/w_0$  reduziert“ in der Kolumne hinter den eigentlichen Beobachtungsresultaten aufgeführt sind. Graphisch dargestellt ergeben diese reduzierten

1) Daß in manchen Fällen schon die Annahme einer linearen Temperaturabhängigkeit weitgehend ausreicht, zeigt die Rechnung von A. Eucken in seiner Arbeit: „Über das Wärmeleitvermögen, die spezifische Wärme und die innere Reibung der Gase.“ Phys. Zeitschr. 14. p. 326. 1913.

Widerstände die Kurven der Taf. II, die in mancher Hinsicht bemerkenswert sind.

Die Reihenfolge der Kurven ist eine ganz andere als vorher und im Temperaturbereich von  $20^\circ$  bis etwa  $140^\circ$  folgende: Pb; Cd; Au; Ag, Pt; Zn; Cu; Co; Ni; Fe. Nach der Voraussage von Nernst, nach der weitgehende Parallelität



Tafel I.

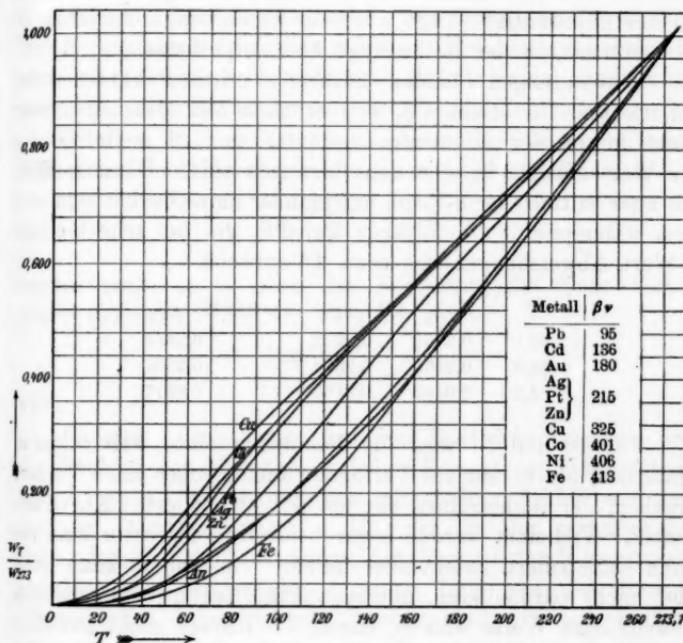
zwischen der spezifischen Wärme eines Metalles und dem Temperaturkoeffizienten seines elektrischen Widerstandes besteht, müste dies der Reihenfolge der  $\beta \nu$ -Werte entsprechen, die für den Verlauf der spezifischen Wärme charakteristisch sind. Die Berechnung dieser  $\beta \nu$ -Werte hat zuerst Lindemann<sup>1)</sup> vorgenommen, auf ganz anderem Wege dann vor einiger Zeit Debye.<sup>2)</sup>

1) F. A. Lindemann, „Über die Berechnung molekularer Eigenfrequenzen. Phys. Zeitschr. 11. p. 609—612. 1910.

2) P. Debye, l. c.

In der folgenden Tabelle sind diejenigen  $\beta \nu$ -Werte angegeben, die nach dem augenblicklichen Stande der Dinge am wahrscheinlichsten sind:

Metall	$\beta \nu$	Metall	$\beta \nu$
Ag	215	Fe	413
Au	180	Ni	406
Cd	136	Pb	95
Co	401	Pt	214
Cu	325	Zn	215



Tafel II.

Wie man sieht entspricht dieser Reihenfolge der  $\beta \nu$ -Werte tatsächlich die Folge der extrapolierten Kurven. Betreffs der Reihenfolge der  $\beta \nu$ -Werte, wie sie sich nach Lindemann bzw. nach Debye berechnen, ergeben sich einige Abweichungen. Wie in der Dissertation ausführlicher dargelegt ist, scheint die Reihenfolge der Lindemannschen Werte die richtigere zu sein.

Zum Schluß noch ein paar Worte über Zulässigkeit oder Unzulässigkeit des angewendeten Verfahrens. Unleugbar bedeutet jede Extrapolation einen Schritt über die Grenze gesicherter Erkenntnis hinaus. Andererseits ist aber gerade im vorliegenden Fall nur durch ein solches Wagnis ein weiterer Überblick möglich. Zieht man alles in Betracht, was über den Verlauf der einzelnen Widerstandskurven Fingerzeige geben kann, so ist auch der Willkür gar kein so großer Spielraum gelassen und eine kleine Verschiedenheit im  $w_a$ -Werte würde an der gegenseitigen Lage nur sehr geringfügige Änderungen herbeiführen, in der Reihenfolge überhaupt keine.

Einwendungen könnten höchstens erhoben werden beim Cd, Co und Ni. Beim Cd, weil es nach den Messungen sehr dicht hinter der Goldkurve verläuft, so daß vielleicht die  $\beta\nu$ -Werte für beide sehr nahe identisch sind. Dann müßten sie aber mittels der  $\alpha$ -Regel aufeinander umrechenbar sein und dem widerspricht die folgende Tabelle, die bei sehr kleinem  $\alpha$ -Wert Abweichungen von etwa  $2^\circ$  aufweist.

$T$	$\text{Au}_{\text{III}}$	Cd umger. ( $\alpha = 0,0058$ )	Cd
90,1	0,2765	0,2822	0,2864
82,9	0,2466	0,2538	0,2581
20,2	0,0160	0,0160	0,0217

Für Co und Ni wird die Benutzung eines weit reineren Materials, als es mir zur Verfügung stand, sicher einen Verlauf ergeben, der im einzelnen von meiner extrapolierten Kurve abweicht. Vielleicht werden sogar beide Kurven, wenn man sie dann extrapoliert, aufeinander fallen. Viel anders kann man aber nicht extrapoliieren, und man müßte schon recht erheblich abweichende Werte wählen, damit die Kurven nicht zwischen Cu und Fe fallen. Man darf, glaube ich, annehmen, daß die Unsicherheit trotz des großen  $\alpha$  doch nur etwa  $3^\circ$  beträgt.

Für die Richtigkeit und Zulässigkeit unserer Methode scheint es auch zu sprechen, daß die Reduktion mit den extrapolierten  $w_a$ -Werten einen gemeinsamen Kurvenzug für Platin (Onnes), Silber und Zink liefert in Übereinstimmung mit der Gleichheit ihrer  $\beta\nu$ -Werte. Charakteristisch genug fällt hierbei der an einem andern Zink gemessene Wert, für den ein ganz anderes  $w_a$  existiert, völlig aus der Kurve heraus.

und offenbart sich so als ein Eindringling, der in dieser Zahlenreihe nichts zu suchen hat. Nach allem bisher Gesagten dürfte es sich auch erübrigen, die Reduktion des Zinks auf die Werte des Silbers noch weiter zu rechtfertigen.

Fassen wir, analog wie wir es bei der Betrachtung der  $\alpha$ -Regel am Schluß taten, auch jetzt wieder in wenigen kurzen Sätzen das Resultat unserer Betrachtungen zusammen, so ergibt sich:

Zwischen dem Energieinhalt und dem Verlauf der Widerstandscurven der Metalle besteht unverkennbare Parallelität. Ihre Reihenfolge ist die der  $\beta \nu$ -Werte. Voraussetzung dabei ist aber, daß es sich um hochgradig reine Metalle handelt, beziehungsweise, daß eine Reduktion auf hochgradige Reinheit gelingt.

Gibt man die eben behauptete Parallelität zwischen Widerstand und Energiegehalt zu, so folgt zugleich, daß

$$\lim \frac{d w}{d T_{(T=0)}} = 0$$

werden muß, da ja nach der Forderung des Nernstschen Wärmetheorems

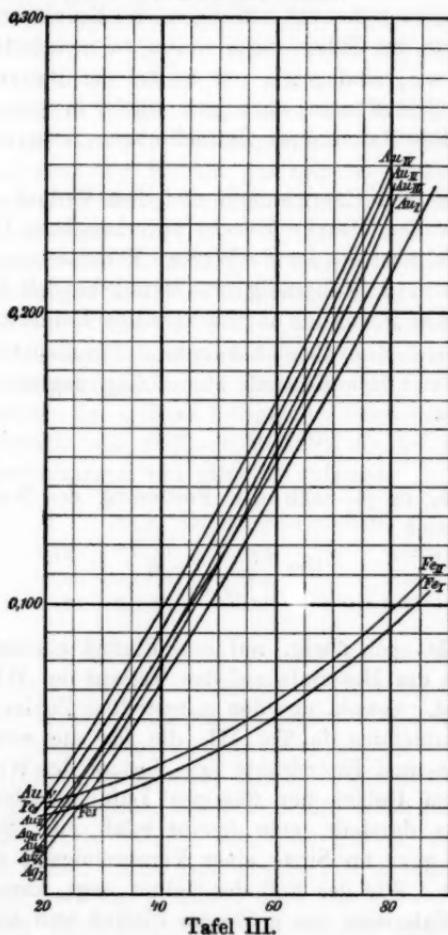
$$\lim \frac{d U}{d T_{(T=0)}} = 0$$

wird.

Es bleibt noch übrig, auf den Einfluß einzugehen, den die Struktur des Materials auf den Verlauf der Widerstandscurve ausübt. Sowohl aus den mitgeteilten Zahlen wie auch aus der Darstellung in Taf. III, die für die verschiedenen Gold-, Silber- und Eisendrähte den Verlauf des Widerstandes zwischen dem Gebiet der flüssigen Luft und des flüssigen Wasserstoffes darstellt, geht hervor, daß eine Strukturverschiedenheit ganz im Sinne einer Verunreinigung die Kurven heraufdrückt. Wie der Fall des Goldes zeigt, kann sogar die Härte des Materials von größerem Einfluß sein als die Verunreinigung. Ausglühen der Drähte<sup>1)</sup> bewirkt eine Verschie-

1) Untersuchungen über den Einfluß der Glühdauer und eine etwaige günstige Temperatur wurden nicht angestellt. Im allgemeinen wurde als Glühtemperatur etwa  $\frac{1}{3}$  der Schmelztemperatur gewählt. Die sehr interessante Studie von Credner: „Über die Veränderungen des galvanischen Widerstandes, welche man beim Ziehen und Tordieren von

bung der Widerstandskurve gegen die Temperaturachse zu, gleichsam als würde das Material reiner.



### Tafel III.

Sucht man nach einer Erklärung für dieses Verhalten, so kann man etwa folgende Überlegungen anstellen:

Drähten und beim Erwärmen gezogener und torquierter Drähte" beobachtet" (Zeitschr. f. phys. Chem. 82, p. 457 ff. 1913) konnte nicht mehr berücksichtigt werden, da der experimentelle Teil dieser Arbeit schon abgeschlossen war, als sie erschien.

Nach den Untersuchungen von Tammann<sup>1)</sup> existieren in einem gezogenen Draht eine große Anzahl sogenannter „Kristallite“. Diese entstehen bei der mechanischen Bearbeitung und speziell auch beim Ziehen durch Zertrümmerung größerer Individuen. Zugleich erfolgt dabei eine Umorientierung, insofern jetzt für die einzelnen Kristallite eine Vorzugsrichtung in Richtung der Überanspruchung des Materials besteht, während vorher ihre Lagerung eine regellose war. Da nun anscheinend die elektrische Leitfähigkeit eine vektorielle Eigenschaft ist, so folgt schon hieraus ohne weiteres, daß beim Ziehen eines Drahtes eine Änderung des Leitvermögens eintreten muß, und die Erfahrung lehrt, daß diese Änderung das Leitvermögen verschlechtert. Durch Erwärmen tritt eine Rekristallisation ein, eine Rückverwandlung der Kristallite in größere Kristalle unter gleichzeitigem Verschwinden der Vorzugsrichtung. Das heißt also, das Leitvermögen nimmt durch das Ausglühen zu. Sehr schön zeigt sich auch hier wiederum die Parallelität von Energieinhalt und elektrischem Widerstand, denn ein Teil der beim Ziehen aufgewandten mechanischen Arbeit wird latent (Gleitflächenenergie) und bedingt so eine Zunahme des Energieinhalts. Damit ist freilich noch nicht unbedingt gesagt, daß auch die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeitsvektoren des Kristalles verschieden in dem erforderlichen Sinne ist. Doch kann hierüber nur der Versuch entscheiden.

#### Zusammenfassung.

Die Resultate der vorliegenden Untersuchung lassen sich kurz folgendermaßen aussprechen:

1. Es wurden für eine Reihe von Metallen die Widerstandskurven bis herab zur Temperatur des siedenden Wasserdampfes ermittelt.

2. Die Gültigkeit der  $\alpha$ -Regel wurde geprüft und für  $\alpha < 0,03$  auf ein bis zwei Zehntelgrad genau befunden. Ihre Bedeutung für die Widerstandsthermometrie und zur Kritik von Widerstandsmessungen wurde dargelegt. Für die Praxis

1) G. Tammann, Über die Änderung der Eigenschaften bei der Bearbeitung von Metallen. Zeitschr. f. Elektrochem. 18. p. 584—598. 1912.

wurden Vorschläge gemacht, die ihrer Anwendung auch für fest gebettete Drähte eine größere Genauigkeit sichern.

3. Mittels dieser  $\alpha$ -Regel und des extrapolierten Grenzwiderstandes beim absoluten Nullpunkt wurden die beobachteten Kurven auf hochgradige Reinheit reduziert. Im Gebiete von  $T = 20$  bis  $T = 80$  ordnen sie sich dann in der Reihenfolge der  $\beta \nu$ -Werte, wie sie sich aus der Bestimmung der spezifischen Wärmen ergeben.

4. Der Einfluß der Vorbehandlung beziehungsweise Struktur wurde studiert. Es zeigte sich, daß eine Strukturverschiedenheit durchaus im Sinne einer Verunreinigung des Materials wirkt und die Kurven empordrückt.

5. Zur Erklärung dieser Erscheinung wurde im Sinne der Tammannschen Kristallittheorie eine Orientierung der Kristalle als Ursache angenommen und das Leitvermögen der Kristalle als vektorielle Eigenschaft betrachtet.

Die mitgeteilten Untersuchungen wurden ausgeführt im Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Berlin. Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Direktor des Instituts Herrn Prof. Nernst hier meinen wärmsten Dank auszusprechen für das große Interesse und die vielfache Förderung die er dieser Arbeit hat zuteil werden lassen.

(Eingegangen 19. Juni 1914.)

**4. Pyro- und piezoelektrische Untersuchungen;  
von W. C. Röntgen.**

Inhalt: 1. Abhängigkeit der pyroelektrischen Konstante eines Turmalins von der Temperatur. 2. Pyroelektrische Beobachtungen an anderen Turmalinen. 3. Pyroelektrische Beobachtungen am Quarz. 4. Piezoelektrische Beobachtungen an verschiedenen Turmalinen. 5. Frage nach der Existenz einer „wahren Pyroelektrizität“.

W. Thomson gab eine Erklärung des pyroelektrischen Verhaltens von Turmalin durch die Annahme einer im Kristall vorhandenen elektrischen Polarisation, deren Größe von der Temperatur abhängig sein sollte.<sup>1)</sup> Nach dem Auffinden der Piezoelektrizität äußerten ihre Entdecker J. u. P. Curie<sup>2)</sup> die Ansicht, daß die pyroelektrischen Erregungen nur eine Folge seien der mit den Temperaturänderungen verbundenen Deformationen, somit auf Piezoelektrizität zurückzuführen seien. Dieser Auffassung glaubte ich mich seiner Zeit auf Grund von eigenen Beobachtungen an Quarzpräparaten anschließen zu können. Nachdem Hr. Voigt in grundlegender Weise eine Theorie der piezo- und pyroelektrischen Erscheinungen aufgestellt hatte<sup>3)</sup>, stimmten die Herren Riecke und Voigt, durch ihre Versuche an Turmalin veranlaßt, anfänglich auch dieser Meinung bei.<sup>4)</sup> Später aber<sup>5)</sup>, nachdem insbesondere bessere Werte für die thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Turmalins erhalten waren, hielt Hr. Voigt den Nachweis für erbracht, daß wenigstens beim Turmalin zwei Ursachen, eine Temperaturabhängigkeit eines vorhandenen elektrischen molekularen Momentes und eine Veränderung des elektrischen Momentes der Volumeneinheit durch thermische Deformation bei der pyro-

1) W. Thomson, Nicol's Encyclopedie of Phys. Sc. 2 ed. 1860.

2) J. u. P. Curie, Compt. rend. 91. p. 294. 1880.

3) W. Voigt, Abh. d. kgl. Ges. d. Wiss. in Göttingen 36. 1890.

4) E. Riecke u. W. Voigt, Wied. Ann. 45. p. 551. 1892.

5) W. Voigt, Ann. d. Phys. 66. p. 1030. 1898.

elektrischen Erregung zusammenwirken. Die erstere nannte Voigt „wahre Pyroelektrizität“.

Mir schien es von Interesse zu sein mit verbesserten Meßmethoden noch einmal festzustellen, daß eine wahre Pyroelektrizität besteht und dann weiter, falls eine Bestätigung sich ergeben hätte, zu untersuchen, in welchem Maße *diese* pyroelektrische Erregung von der Temperatur abhängt. Ich dachte dabei später an die neueren Ergebnisse auf dem Gebiet des Magnetismus, glaubte auch bei den pyroelektrischen Erscheinungen einen Einfluß der Wärmebewegung annehmen zu dürfen und hoffte, zu erfahren, wie das nach W. Thomson vorhandene elektrische Moment der Bausteine des Turmalins von der Temperatur beeinflußt wird. Um dieses ziemlich weit gesteckte Ziel zu erreichen war es nötig: 1. Alle nach Voigts Theorie zur Beantwortung der Frage nötigen Konstanten an Präparaten aus *einem* tadellosen, mit den erforderlichen Flächen versehenen Kristall geschnitten zu bestimmen. 2. Präparate von garantiert sehr genau orientierter Richtung herstellen zu lassen. 3. Messungen in einem größeren Temperaturbereich auszuführen als bisher geschehen ist. 4. Bei diesen Messungen eine größere Genauigkeit zu erreichen als bisher erreicht wurde. Um zu erfahren, ob diese Bedingungen in genügendem Maße erfüllt werden könnten, war es selbstverständlich nicht angezeigt mit dem Ankauf von einem kostspieligen, kristallographisch wohl ausgebildeten Turmalin und mit dessen Zerlegung anzufangen; ich habe deshalb statt dessen schon vor manchen Jahren zu dem angegebenen Zweck eine Voruntersuchung an leicht zu beschaffenden Kristallstücken in Angriff genommen und diese Arbeit von Zeit zu Zeit fortgesetzt. Leider bin ich dabei auf Schwierigkeiten gestoßen, die wenigstens zum Teil bisher noch nicht empfunden, jedenfalls nicht beschrieben wurden; sie wurden die Ursache, daß ich trotz recht zeitraubender Bemühungen den ursprünglich gefaßten Plan aufgegeben habe. Wenn ich mir nun doch erlaube über meine Erfahrungen im folgenden zu berichten, so geschieht das in der Meinung, daß deren Kenntnis doch wohl einigen Nutzen bringen könnte, daß sie vielleicht für andere Forscher den Weg ebnen könnten, um das jedenfalls sehr erstrebenswerte oben angegebene Ziel zu erreichen.

**Pyroelektrische Bestimmungen.****1. Ausführliche Versuche mit einem Turmalinstäbchen.**

Zur Verwendung gelangte ein brasilianisches Turmalinstäbchen mit natürlichen Seitenflächen (Bezeichnung Nr. X) von hellgrüner Farbe. Die Dichte beträgt bei Zimmertemperatur 3,1076. Bei den ersten Versuchen betrug seine Länge 2,49<sub>3</sub> cm, bei den letzten 2,48<sub>8</sub> cm. Der Querschnitt ergab sich aus Volumen und Länge zu 0,2438 qcm, und zwar war derselbe örtlich nicht merklich verschieden. Die Endflächen waren von der Firma C. Zeiss senkrecht zur Säule zuerst matt, bei den letzten Versuchen poliert eben geschliffen. Von Verletzungen, Verwachungen oder Farbenverschiedenheiten war nichts zu bemerken. Als Belegung der Endflächen wurde bei den mattgeschliffenen Graphit (Bleistift), bei den polierten ein auf nassem Wege hergestellter Silberüberzug gewählt. Es sei gleich bemerkt, daß die Art der Belegung keinen Einfluß auf das Resultat hatte.

Mit der Erd- resp. Elektrometerleitung wurden die Silberlegungen anfänglich durch einen Tropfen Woodmetall verbunden; infolge der verschiedenen Ausdehnungskoeffizienten von diesem Metall und von Turmalin sprangen diese Tropfen bei der Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft ab, auch wurden dabei zu vermeidende Spannungen erzeugt, die vielleicht Veranlassung zu Piezoelektrizitätsregung geben könnten; deshalb wurde später, wie bei den graphitierten Flächen eine gut leitende Verbindung durch aufgedrückte Platinfolie hergestellt (vgl. unten).

Die Seitenflächen des Turmalins blieben bei den meisten Versuchen nicht ohne Belegung. Wenn es möglich wäre, das Stäbchen so zu erwärmen oder abzukühlen, daß zu keiner Zeit keine Temperaturverschiedenheit zwischen zwei Stellen des Kristalls vorhanden ist, so müßte bekanntermaßen bei abgeleiteten oder miteinander leitend verbundenen Endbelegungen von einer pyroelektrischen Erregung auf den Säulenflächen nichts zu bemerken sein. Nun ist aber diese Gleichheit der Temperatur während der vorgenommenen Temperaturänderung praktisch selbstverständlich nicht zu erreichen, und es schien mir deshalb von Interesse zu sein, wenigstens einen Anhaltspunkt zu erhalten für die Beurteilung der Frage, ob und inwieweit diese Ungleichheit das Resultat

beeinflussen konnte. Die angebrachten Seitenbelegungen bestanden entweder aus dünnen, mit einer Spur Gummi sorgfältig angeklebten Stanniolstreifen, die in der Mitte des Stäbchens durch einen ca. 0,1 cm breiten Ring voneinander und an den Endflächen des Stäbchens durch ähnliche Ringe von den dort befindlichen Belegungen isoliert waren, oder was vorzuziehen war, und meistens auch zur Ausführung kam, aus einer Silberbelegung mit noch schmäleren Isolierringen. Durch umgewickelte, feine Platindrähtchen konnten diese Belegungen entweder mit der Erde oder mit dem Elektrometer in leitende Verbindung gesetzt werden.

Die Isolationsfähigkeit aller untersuchter Turmaline war bei 0° und bei tiefen Temperaturen ausgezeichnet, auch bei 40° durchaus genügend; selbstverständlich eine peinlich ausgeführte Reinigung der Kristalle vorausgesetzt.

Um eine immerhin möglichst gleichmäßige Temperaturänderung zu erreichen waren anfänglich die Stäbchen in einem 4 cm weiten, 7 cm hohen zylindrischen Messungsgefäß *m* (Fig. 1) zentrisch an dünnen Drähten aufgehängt. Diese Art der Aufstellung mußte aber aufgegeben werden, da sie das oben erwähnte Anlöten der Verbindungen bedingte, was, wie gesagt, zu vermeiden war, und es kam folgendes aus der Figur ersichtliche Verfahren zur Anwendung. Das Stäbchen *t* wurde

zwischen einer mit Rücksicht auf piezoelektrische Einflüsse sehr schwachen Metallfeder *f* und einer runden vielfach durchlöcherten Messingplatte *p*, die von zwei Metallstäbchen gehalten wird, nach Zwischenlage von Platinfolie eingeklemmt. Die Feder stand mit der Elektrometerleitung, die Platte mit der Erde, in Verbindung. Wie die zum oberen

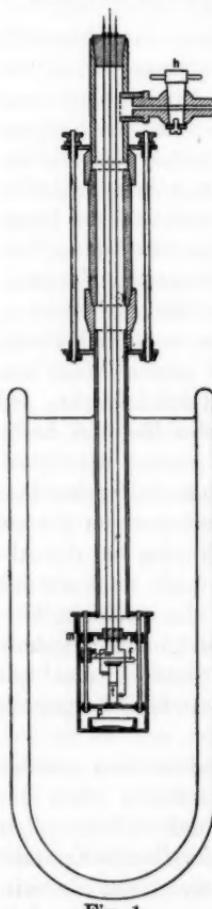


Fig. 1.

Pol und zu den beiden Seitenbelegungen führenden Leitungen mittels Hartgummi isoliert durch den an dem Messingzylinder angebrachten Stiel geführt wurden, und durch eine einfache Vorrichtung gespannt gehalten werden konnten, ist wohl ohne weiteres aus der Zeichnung zu entnehmen. Bei den eigentlichen Versuchen waren die Seitenbelegungen geerdet, und der eine Pol mit dem Elektrometer verbunden; andere Verbindungen konnten durch Umlöten der oberen Drahtenden rasch hergestellt werden.

Das als Stiel dienende Rohr bestand im unteren und im oberen Teil aus Messing, der mittlere zur thermischen Isolation aus Porzellan mit einer Einlage aus dünnem Metallblech, das ebenso wie die übrigen Metallteile des Behälters stets geerdet war. Um den Luftinhalt der ganzen Hülle mit Rücksicht auf die elektrische Isolation trocken zu halten, war auf den Boden des Zylinders ein Schälchen mit Phosphorpentoxyd aufgestellt; außerdem aber war es nötig zu verhindern, daß während der starken Abkühlung auf die Temperatur des festen Kohlendioxys und der flüssigen Luft feuchte Zimmerluft angesaugt wurde; denn wenn auch bei diesen tiefen Temperaturen der entstehende Niederschlag als fest gefroren die Isolation nicht wesentlich verschlechterte, so wurde doch bei einem auf den Abkühlungsversuch folgenden Erwärmungsversuch auf  $0^{\circ}$  kurz bevor die Temperatur von  $0^{\circ}$  erreicht war, die Isolation so schlecht, daß der betreffende Versuch nicht zum Ende geführt werden konnte. Dieses Eindringen von feuchter Zimmerluft wurde vermieden entweder durch luftdichten Abschluß des Behälters (Hahn  $h$ ), oder wenn auf dieses Mittel kein Verlaß war, durch Vorschalten einer Chlorcalciumröhre.

Zur Messung der entwickelten Pyroelektrizität diente ein Curiescher Piezoquarzapparat mit der in meiner Veröffentlichung in den Ann. d. Phys. 41. 1913 erwähnten Lamelle Nr. II. Drei geeignete, sicher und rasch funktionierende Wippen gestatteten die drei Hauptteile der Versuchseinrichtung Turmalin, Piezoquarz, Elektrometer einzeln zur Erde abzuleiten oder miteinander in Verbindung zu setzen.

Da auch der Quarz durch Temperaturänderungen elektrisch werden kann, entstand die Frage, ob bei den ca. 45 Minuten dauernden Versuchen nicht auch der Piezoquarz in-

folge von Änderungen der Zimmertemperatur einen merklichen Beitrag zu der zu messenden Elektrizitätsmenge liefern konnte. Um diese Frage zu beantworten wurde zunächst der Piezoquarz Nr. II durch Erwärmen der umschließenden Hülle geprüft, dann aber noch genauere Versuche mit den Lamellen Nr. I und IV angestellt. Über diese Versuche soll weiter unten ausführlicher berichtet werden; vorläufig gebe ich nur an, daß sie in genügender Übereinstimmung untereinander das Resultat lieferten, das eine Temperaturänderung von ca.  $2^{\circ}$  eine durch 1 g zu kompensierende Elektrizitätsmenge lieferte. Da nun 1 g unsere angenommene Genauigkeitsgrenze der Belastung darstellt, so wäre bei den eigentlichen Bestimmungsversuchen eine solche Änderung der Quarztemperatur während eines Versuches zu vermeiden gewesen, was auch sicher der Fall gewesen ist.

Das als Nullinstrument verwendete Edelmannsche Saitenelektrometer hat die Vorteile einer raschen Einstellung, einer geringen Kapazität, der Möglichkeit rasch seine Empfindlichkeit — durch Änderung der Fadenspannung — ändern zu können und schließlich einer guten zeitlichen Erhaltung des Nullpunktes, wenigstens im Falle geringer Voltempfindlichkeit und genügender Temperaturkonstanz der Umgebung. Da ein Versuch eine ziemlich lange Zeit beanspruchte — bis zu einer Stunde — kam es sehr darauf an jede unbeabsichtigte Zufuhr von Elektrizität zu dem von der Erde isolierten System: Turmalinbelegung, Leitung, Kommutatoren, Piezoquarz und Elektrometerfaden fern zu halten; zu diesem Zweck war das ganze System in zur Erde abgeleiteten metallischen Hüllen eingebaut. Trotzdem zeigte sich in der allerletzten Zeit, nachdem der Apparat in einem anderen Raum Aufstellung gefunden hatte, daß eine fremde, wenn auch geringe stets positive Ladung zum System gelangte, deren Quelle wohl sicher in ionisierter Luft zu suchen war. Weiter unten wird darüber noch das Erforderliche mitgeteilt werden. Ein anderes einseitiges Wandern des Elektrometerfadens, das bedeutende Fehler zur Folge haben, aber nur bei nicht sehr sorgfältig gereinigten Turmalinen bei höherer Temperatur auftreten könnte, wird durch Voltaelektrizität erzeugt, die ihre Quelle in einer Verschiedenheit der Metallbelegungen und der Oberflächenverunreinigung der Iso-

lierstreifen des Kristalls hat. Dieser Fehler kann aber sicher vermieden werden.

Die gewöhnlich gebrauchte Empfindlichkeit des Elektrometers war mit Rücksicht auf eine möglichste Konstanz des Nullpunktes und auf die unten zu beschreibende Verwendung des Instrumentes nicht sehr groß; sie betrug ca. 3,3 Skt. pro Volt, resp. 0,7—0,8 Skt. für die durch 20 g Belastung des Piezoquarzes erzeugte Elektrizitätsmenge bei Zuschaltung des Turmalins. Wenn der Elektrometerfaden so eingestellt wird, daß der Rand seines Bildes mit dem Nullstrich der Okularteilung sehr nahezu zusammenfällt, so läßt sich die Nullstellung bis auf etwa  $1/30$  Sekt. schätzen; das entspricht aber ungefähr 1 g Belastung des Piezoquarzes.

Ein Versuch, zu dem zwei Beobachter nötig waren, von denen der eine das Elektrometer beobachtete und die Kommutatoren und den Piezoquarz bediente, der zweite die übrigen Operationen ausführte, ging folgendermaßen von statthen: Nachdem der Elektrometerfaden so eingestellt war, wie es soeben beschrieben wurde, folgte eine Prüfung der Isolation des Leitersystems, und zwar jedesmal bei der konstant gewordenen Temperatur des Turmalins, die sich in dem betreffenden Bad nach Verlauf von 35—50 Minuten (vgl. über diese Zeit das weiter unten Mitgeteilte) hergestellt hatte. War kein Isolationsfehler vorhanden, so wurde nach Beobachtung der Badtemperatur das Leitersystem von der Erde isoliert und das Bad gewechselt, wobei darauf acht gegeben wurde, daß die Temperatur des Turmalins nicht zu rasch sich veränderte, einmal, weil man gerne örtliche Temperaturungleichheiten im Turmalin möglichst vermied, und zweitens, damit die Entwicklung von Pyroelektrizität so langsam vor sich ging, daß der Beobachter am Piezoquarz sie richtig kompensieren konnte.

Diese Kompensation geschah durch allmähliche Belastung des Piezoquarzes mit Hilfe von Schrotkörnern (50 Schrotkörner wiegen ca. 10 g), die aus einem kleinen, in der Hand gehaltenen Behälter in eine auf der Schale des Piezoquarzes gestellte, leichte Metalldose eingefüllt wurden, und zwar unter fortwährender Beobachtung des Elektrometers. Mit einiger Übung ließ sich leicht erreichen, daß kein größerer Ausschlag des Elektrometers zustande kam; kleinere sind wegen der guten

Isolation nicht schädlich, und um in dieser Beziehung noch ein Übriges zu tun, wurde ein etwa entstandener kleiner Überschuß von Pyroelektrizität sofort durch eine etwas zu große Belastungsvermehrung überkompensiert und umgekehrt. Bei Anwendung von flüssiger Luft überstieg die anzuwendende Belastung 2 kg, und da ein größeres Gewicht dem Piezoquarz nicht zugemutet werden sollte, mußte während eines Versuchs die Belastung gewechselt werden. Das geschah in der Weise, daß in einem passenden Augenblick, wo gerade der Elektrometerfaden nach einer vorhergegangenen Überbelastung die Nullstellung erreicht hatte, der Piezoquarz vom System abgeschaltet und mit der Erde verbunden wurde. Dann konnte ohne Schaden rasch die Dose mit den Schrotkörnern entfernt, durch eine leere ersetzt und der Piezoquarz wieder dem System zugeschaltet werden. Die Wägung der Schrotkörner geschah auf einer Tafelwage, die noch 1 g Gewichtsdifferenz angab. Der Versuch war zu Ende, wenn der Turmalin die Badtemperatur genügend angenommen hatte.

Zur Entscheidung der wichtigen Frage, welche Zeit erforderlich ist, damit der Turmalin nach einer vorgenommenen Temperaturänderung die konstante Temperatur des neuen Bades angenommen hat, haben wir verschiedene Wege eingeschlagen. Zunächst wurde zur Orientierung ein auf 20° erwärmtes Pantanthermometer in eine Messinghülle von der ungefähren Form des beschriebenen Turmalinbehälters eingesetzt und dann mit dieser Hülle in Eis von 0° gebracht. In ca. 15 Minuten war die Temperatur bis auf weniger als 0,1° auf 0° gesunken. Ein maßgebender Versuch wird auf p. 751 beschrieben werden. Hier soll ein Versuch erwähnt werden, der mit einem aus dem Turmalin Nr. III geschnittenen Parallelipiped (ca. 4 × 8 × 8 mm) ausgeführt wurde, das aus später anzuführenden Gründen den Verdacht erweckt hatte, seine Endtemperaturen wären bei der pyroelektrischen Untersuchung gegen die Badtemperatur zurückgeblieben.

Es wurde die durch zwei verschieden große Temperaturintervalle: 0—40,8° und 15,30—17,45° in dem erwähnten Parallelipiped entwickelte Menge Pyroelektrizität in Gramm der kompensierenden Belastung des Piezoquarzes ( $b_{40,8}$  resp.  $b_{15,3}$ ) gemessen und jeder Versuch so lange ausgedehnt, bis nach

einer anfänglich lebhaften, dann immer langsamer gewordenen Elektrizitätsentwickelung das Elektrometer während ca. 5 Minuten keine neue Entwicklung mehr anzeigen. Wir dürfen dann wohl annehmen, daß bei jedem solchen Versuch die verbleibende Temperaturdifferenz zwischen Turmalin und Bad die gleiche gewesen ist, daß somit die zu beobachtenden kompensierenden Belastungen wenigstens sehr nahezu um denselben Betrag  $\Delta$  zu klein gemessen sind. Es läßt sich dann, wie die Folge zeigen wird, die im Temperaturintervall 15,30 bis 17,45° erzeugte Pyroelektrizität mit der im Temperaturintervall von 0—40,8° beobachteten für unsere Zwecke genügend genau darstellen durch folgende Beziehung:

$$(b_{2,15^\circ} + \Delta) = \frac{2,15^\circ}{40,8^\circ} (b_{40,8^\circ} + \Delta),$$

woraus sich der event. gemachte Fehler  $\Delta$  ergibt. Die Versuche ergaben nun  $b_{2,15^\circ} = 110$  g (im Mittel) und  $b_{40,8^\circ} = 2124$  g folglich  $\Delta = 2$  g, d. h. jedenfalls einen Betrag, der für die eigentlichen Bestimmungsversuche der pyroelektrischen Konstante, die in dem Temperaturintervall von 0° bis ca. 40° gemacht wurden, ganz außer Betracht bleiben kann. Demnach sind diese Versuche, bei denen ja immer so lange gewartet wurde, bis das angegebene Merkmal eingetreten war, bezüglich der Temperaturmessung wohl sichergestellt.

Das wäre aber nicht ohne weiteres der Fall für Versuche bei tiefen Temperaturen, denn bei diesen Temperaturen ist die pyroelektrische Erregung bedeutend kleiner. Indessen haben wir auch für diese Fälle die nötige Sicherheit dadurch gewonnen, daß wir mit dem angegebenen Mittel für das Intervall 0° bis ca. 40° die Versuchsdauer aufsuchten, die genügte, um den gewünschten Temperaturausgleich zu erreichen, und daß wir dann diese Dauer, zu 30—45 Minuten reichlich bemessen, auch bei den tiefen Temperaturen anwandten.

Nachdem alle Bestimmungsversuche abgeschlossen waren, kam mir nochmals ein Bedenken gegen die Annahme, daß die Turmaline in jedem Falle die Temperatur des Bades genügend genau angenommen hätten. Aus gleich nachher anzugebenden Gründen schien es möglich zu sein, daß nach einem vorgenommenen Wechsel der Bäder die Turmalintemperatur

selbst dann, wenn sie genügend konstant geworden war, noch gegen die Badtemperatur zurückgeblieben war. Um diese Frage endgültig zu erledigen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen, die an Sicherheit alle anderen übertrifft, und mit der deshalb die Untersuchung eigentlich hätte anfangen sollen.

Nachdem aus dem Turmalinbehälter — Messingzylinder mit Stiel — die drei Zuleitungsdrähte mit ihren Befestigungs vorrichtungen entfernt waren, wurde der Deckel des Zylinders an zwei Stellen durchbohrt und dort mit zwei kleinen verlöteten Rohrstückchen versehen. Durch diese Öffnungen wurden, durch gut schließende und mit passendem Material gedichtete Hartgummizylinderchen isoliert, die beiden ca. 0,2 mm dicken Drähte eines Thermoelements aus Kupfer und Konstantan geführt. Die eine möglichst flach gekloppte Lötstelle befand sich zwischen zwei flachen Turmalinstückchen, die durch Seiden fäden aneinandergepreßt ein Stück bildeten von der ungefährnen Form und Größe des oben erwähnten aus Turmalin Nr. III geschnittenen Parallelipipeds  $8 \times 8 \times 4$  mm. Die zweite Löt stelle befand sich in der Nähe der Außenwand des Messing zylinders, also in der Badflüssigkeit; sie war nur um ein kurzes Stück Konstantandraht von der ersten entfernt, damit dieser Draht nirgendwo aus dem Bad hervorzuragen brauchte, was sonst gerade bei diesem Material leicht zu störenden Thermoströmen Veranlassung gegeben hätte. Zur Isolation gegen die Badflüssigkeit wurde ein Schellacküberzug angebracht. Die beiden Kupferdrähte des Thermoelements führten zu einem Drehspulengalvanometer, dessen Ablenkung mit Fern rohr und Skala beobachtet wurde. Kontrollversuche hatten ergeben, daß bei jeder Temperatur die Leitung stromlos war, wenn beide Lötstellen — nach Abnehmen der Messinghülse — sich in derselben gut umgerührten Badflüssigkeit befanden. Bei Zimmertemperatur betrug die Empfindlichkeit des Galvanometers ca. 10 Skalenteile Ausschlag für  $1^\circ$  Temperaturdifferenz, bei der Temperatur der flüssigen Luft ca. 3 Skalenteile pro  $1^\circ$ .

Der Versuch bestand nun darin, daß man zu einer bestimmten Zeit den Turmalinbehälter, der mit seinem Inhalt Zimmertemperatur (ca.  $18^\circ$ ) besaß, in ein Bad von höherer Temperatur (ca.  $40^\circ$ ) oder von tieferer Temperatur (ca.  $-195^\circ$ )

eintauchte und dann von einer passenden Zeit an die Galvanometerausschläge in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bestimmte. Mit einiger Übung ließ sich erreichen, daß die im Dewargefäß enthaltene gut gerührte Badflüssigkeit ihre Temperatur während eines Versuchs nur um einige Hundertstel Grade änderte und gegen Ende des Versuchs überhaupt unverändert beibehielt.

Es stellte sich nun bald heraus, daß in beiden Fällen, sowohl bei einer Erwärmung auf ca.  $40^{\circ}$  als bei einer Abkühlung auf  $-195^{\circ}$  die Turmalintemperatur auch nach sehr langer Zeit gegen die des Bades dauernd zurückblieb; im ersten Falle um ca.  $0,65^{\circ}$ , im zweiten um ca.  $0,3^{\circ}$ . Das sind Beträge, die, wenn sie auch bei den pyroelektrischen Versuchen vorhanden gewesen wären, namentlich bei Versuchen mit geringeren Temperaturintervallen, die Resultate merklich hätten fälschen können. Es ist deshalb erfreulich, daß wir, nachdem ihre Ursache festgestellt war, haben nachweisen können, daß sie bei jenen Versuchen nicht vorhanden gewesen sind.

Veranlassung zu dieser Nachprüfung hatte die Überlegung gegeben, daß, wenn auch der Turmalinbehälter immer recht tief in der betreffenden Badflüssigkeit eingetaucht war, der Inhalt des Messingzyinders doch nicht von allen Seiten von einer gleichtemperierte Wand umgeben war, sobald andere Temperaturen in Anwendung kamen als die Zimmertemperatur. Im oberen Teil des Stieles herrschte in diesen Fällen eine höhere, resp. eine tiefere Temperatur als in dem Zylinder, was zur Folge haben könnte, daß bei Strahlungsgleichgewicht auch nach längerer Zeit die Temperatur des Zylinderinhalts — des Kristalls usw. — gegen die Badtemperatur merklich zurückgeblieben wäre. Auch schien es nicht ausgeschlossen zu sein, daß, im Falle das Bad eine höhere Temperatur besaß als die Zimmerluft, absteigende Luftströmungen im Behälter den gleichen Effekt hervorbrächten. Beide Störungen müßten wegfallen, wenn an der Eintrittsstelle des Stieles in den Zylinder eine den Zylinder abschließende Metallkappe angebracht wäre. Nachdem dieser Verschluß angebracht war, stellte sich bei einer Wiederholung der beiden oben mitgeteilten Versuche tatsächlich heraus, daß nunmehr in beiden Fällen von einer

Temperaturdifferenz am Schluß eines jeden Versuchs nichts mehr zu bemerken war.

Bei den pyroelektrischen Bestimmungsversuchen war aber kein solcher Verschluß vorhanden; dagegen befand sich in diesen Fällen dicht unter der Stielöffnung eine von Metall eingefaßte Hartgummischeibe, in der die Zuleitungsdrähte befestigt waren (vgl. Fig. 1), und es fragte sich nun, ob diese Vorrichtung vielleicht denselben Dienst geleistet hatte, wie die metallische Verschlußkappe. Nochmals in der vorhin angegebenen Weise angestellte Versuche in den beiden mitgeteilten Temperaturintervallen ergaben, daß dies wirklich der Fall war: nach Abkühlung auf  $-195^{\circ}$  blieb keine meßbare Differenz — meßbar wäre etwa  $0,03^{\circ}$  gewesen — in der Turmalin- und der Badtemperatur, nach Erwärmung auf ca.  $40^{\circ}$  eine für unsere Zwecke völlig belanglose Differenz von  $0,01^{\circ}$  bestehen.

Da die Versuche, wie erwähnt, den zeitlichen Verlauf der Turmalintemperatur ergaben, können wir aus ihnen die Zeit entnehmen, die nötig war, um nach einem Badwechsel eine genügende Gleichheit von Turmalin- und Badtemperatur zu erreichen. Es ergab sich folgendes:

Die Turmalintemperatur ist von der Badtemperatur verschieden (von den erwähnten Hundertstelgraden abgesehen):

bei einer Abkühlung von ca. $18^{\circ}$ auf ca. $-195^{\circ}$	bei einer Erwärmung von ca. $18^{\circ}$ auf ca. $40^{\circ}$
noch um $10,0^{\circ}$ : 5 Min.	1 Min. 57 Sek.
" " $1,0^{\circ}$ : 9 " 25 Sek.	8 " 44 "
" " $0,1^{\circ}$ : 15 "	15 "
" " $0,0^{\circ}$ : 20 "	24 "
	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: right; margin-right: 20px;">nach Anfang</div> <div style="text-align: right;">der</div> <div style="text-align: right;">Temperatur-</div> <div style="text-align: right;">änderung</div> </div>

Demnach hat in beiden Fällen eine Versuchsdauer von 15—20 Minuten vollständig ausgereicht zur Herstellung eines genügenden Temperaturausgleichs. Das gilt natürlich auch für die eigentlichen Bestimmungsversuche der pyroelektrischen Konstante, und wenn wir bei diesen Versuchen, namentlich bei denen mit großen Temperaturintervallen, noch länger gewartet haben (30—45 Minuten), so ist das durch den Umstand gerechtfertigt, daß das Eintauchen des Turmalinbehälters in das neue Bad langsamer geschehen mußte als bei den zuletzt beschriebenen Versuchen, weil sonst die Entwicklung der Pyro-

elektrizität im Anfang des Versuchs zu rasch stattgefunden hätte, um noch mit dem Piezoquarz gemessen werden zu können. Bei den Versuchen mit geringerem Temperaturintervall (vgl. unten) haben wir rasches Eintauchen und deshalb eine kürzere Versuchsdauer anwenden können.

Nach diesen Versuchen steht es nun sicher fest, daß unsere Temperaturangaben volles Vertrauen verdienen.

Als Badflüssigkeiten zur Herstellung verschiedener Temperaturen dienten: Flüssige Luft, Alkohol-Kohlendioxydmischung, schmelzendes Eis, warmes Wasser.<sup>1)</sup>

Die flüssige Luft befand sich in einem 10 cm weiten, 30 cm hohen Dewargefäß, so daß der Turmalinbehälter ca. 18 cm tief eintauchte. Öfters Umrühren und häufige Ablesung des dauernd eingetauchten Pentanthermometers sind nötig, um sichere Temperaturangaben zu erhalten.

Auch das Kohlendioxyd befand sich in einem ähnlichen nur noch weiteren Dewargefäß. Das Arbeiten mit dieser Mischung ist nicht so einfach als anfänglich angenommen wurde, was daran liegt, daß das frisch gewonnene feste Kohlendioxyd eine tiefere Temperatur hat als die normale Siedetemperatur. So beobachtete ich z. B. jene Temperatur einmal zu  $-88,5^{\circ}$ , so daß man durch Mischen mit Alkohol leicht ein Bad erhält, dessen Temperatur unter dem normalen Siedepunkt liegt, namentlich wenn die Mischung sich in einem Dewargefäß befindet und breiartig ist. Günstigere Verhältnisse bekommt man mit festem Kohlendioxyd, das in nicht zu kompakter Masse etwas längere Zeit an der Luft gelegen hat, wodurch die Temperatur dem Siedepunkt wesentlich näher gerückt wird. Auf alle Fälle ist ein fleißiges Umrühren des Bades und häufige Temperaturkontrolle notwendig. Bei den letzten Versuchen mit diesem Bad wurde das Dewargefäß portionenweise gefüllt mit einer in kleinen Mengen vorher angesetzten Mischung, die keineswegs breiartig war, sondern aus Alkohol mit einem nicht sehr hohen Bodensatz von Kohlendioxyd bestand. Während des Versuches wurde dann fleißig gerührt, das Pentanthermometer beobachtet und von Zeit zu Zeit eine kleine Menge fester Kohlensäure zugefügt. In dieser Weise

1) Später auch flüssiger Wasserstoff.

ließ sich die Temperatur genügend konstant erhalten, und dürfte sie nur wenig von dem normalen Siedepunkt entfernt gewesen sein.

Als Badtemperatur wurde sowohl bei der flüssigen Luft als bei der Kohlendioxydmischung die von einem der beiden von der Phys.-Techn. Reichsanstalt wiederholt geprüften Pentanthermometer angegebene genommen. Die Angaben der Phys.-Techn. Reichsanstalt sind auf  $0,5^{\circ}$  abgerundet, bei der Ablesung konnten noch  $0,2^{\circ}$  geschätzt werden.

Um die mit Konsistenzfett hergestellte Dichtung des Gewindes vom Turmalinbehälter gegen Alkohol zu schützen, war dieser Behälter bei den Kohlendioxydbädern mit einer fest zugebundenen, eng anliegenden Schweinsblase umgeben.

Daß auch bei den Bädern von geschabten Eis (oder Schnee) mit destilliertem Wasser gemischt einige Vorsicht geboten ist, ist genügend bekannt. Insbesondere möchte ich erwähnen, daß bei den Erwärmungsversuchen von der Temperatur der festen Kohlensäure auf  $0^{\circ}$  diese letztere Temperatur bei einzelnen Versuchen um  $0,1$ — $0,2^{\circ}$  zu niedrig gewesen sein kann, infolge der Abkühlung des Eisbades (ca. 2,5 l) durch die geringe Menge von Alkohol die von der Schweinsblase von dem vorhergehenden Kohlendioxydbad mitgebracht war. Diese kleine Störung fand sich erst später; sie wurde in Anbetracht des oben angegebenen Spielraumes für die Bestimmung der Temperatur mit dem Pentanthermometer nicht weiter berücksichtigt; die weiter unten erkennbare gute Übereinstimmung in den Werten für die kompensierende Belastung bei Erwärmungs- resp. Abkühlungsversuchen beweist, daß die erwähnte Störung sich nicht bemerkbar gemacht hat. Auch lieferte ein Versuch, bei dem der erwähnte Fehler sorgfältigst vermieden war, dasselbe Resultat wie die anderen.

Das Warmwasserbad war in einem Thermostaten enthalten, der zu einem von der Firma C. Zeiss gelieferten Dilatometer gehört. Die Erwärmung geschah durch einen untergesetzten Flammenkreis und die Temperaturmessung im Außenraum des Thermostaten mit einem in  $1^{\circ}$  eingeteilten Thermometer, dessen Korrektion unbekannt war, im Bad selbst mit einem von der Phys.-Techn. Reichsanstalt geprüften in  $0,1^{\circ}$  geteilten Thermometer. Selbstverständlich war auch hier

fleißiges Rühren nötig. Ein Streifen aus dünnem Kautschuk schützte die Dichtung des Turmalinbehälters gegen das Eindringen von Wasser.

Wie die Bestimmung der Temperatur des Turmalins hier geschah, geht aus folgenden Daten, die sich auf einen Versuch mit Turmalin Nr. X beziehen, hervor.

Ungefähr  $1\frac{1}{2}$  Stunden nach dem Anheizen des Thermo- staten wurden die nachstehenden Beobachtungen gemacht. In der zweiten und dritten Kolumne stehen die wahrgenommenen Temperaturen, in der vierten ist das Verhalten des mit dem Turmalin verbundenen, für diese Zwecke wesentlich empfindlicher gemachten Elektrometers und die Regulierung der Heizflämmchen mitgeteilt.

Tabelle 1.

Zur Zeit	Stand der Thermometer		Bemerkungen
	im Außenraum	im Innenraum des Thermostaten	
5 <sup>h</sup> 48'	41,0°	40,30°	
50'	41,0°	40,50°	
52'	40,9°	40,63°	
54'	40,8°	40,73°	
56'	40,8°	40,75°	
58'	40,8°	40,80°	
6 <sup>h</sup> 0'	40,8°	40,80°	
2'	40,8°	40,80°	
4'	40,8°	40,80°	Flammen kleiner gemacht.
10'	40,7°	40,70°	Elektrometer unveränd.
12'	40,5°	40,68°	
15'	40,4°	40,60°	Elektromtr. zeigt i. Verl. v. ca. 20 Sek. deutl. Abkühl. an

Nach der letzten Thermometerablesung wurde der Turmalin für kurze Zeit isoliert, um das Elektrometer rasch wieder auf die gewöhnliche Empfindlichkeit zu bringen; dann wurde

1) Ein selbständiger Gang des Elektrometers (vgl. oben) war bei diesen etwa 2 Jahre zurückliegenden Versuchen noch nicht vorhanden. Der trat erst später ein, nachdem das Elektrometer in einen anderen Raum gebracht war, wo wahrscheinlich radioaktive Wirkungen ihn verursachten.

der Turmalin wieder mit dem Elektrometer verbunden und der Piezoquarz zugeschaltet. Der eine Beobachter entfernte darauf langsam das Bad und ersetzte es durch ein Eisbad, während der andere Beobachter die entstehende Pyroelektrizität mit dem Piezoquarz in der oben beschriebenen Weise kompensierte.

Aus den Beobachtungen der Tabelle geht hervor, daß wenn man für die Berechnung der pyroelektrischen Konstante die Temperatur  $40,7^{\circ}$  zugrunde legt, diese Temperatur kaum um  $0,1^{\circ}$  falsch gewählt sein kann. Die Versuche zeigen aber auch das für die Beobachtungen bei anderer Temperatur wichtige Resultat, daß, wenn bei irgend einem anderen Versuch zur Bestimmung der pyroelektrischen Konstante in dem Temperaturintervall von  $0-40^{\circ}$  eine Temperaturdifferenz zwischen Turmalin und Bad am Anfang oder am Schluß eines Erwärmungs- oder Abkühlungsversuches von  $0,2^{\circ}$  noch vorhanden gewesen wäre, diese Differenz sich in der Zeit von ca. 5 Minuten, die immer abgewartet wurden, am Elektrometer hätte bemerkbar machen müssen. Da dies niemals der Fall war, so können wir sicher sein, daß zwischen Turmalin und Bad in jedem dieser Fälle ein genügender Temperaturausgleich stattgefunden hat. (Eine noch sichere Entscheidung über diese Frage vgl. p. 746 u. ff.)

Bei den meisten der hier anzuführenden pyroelektrischen Versuche waren die beiden, oben p. 739 erwähnten Seitenbelegungen des Turmalins zur Erde abgeleitet. Zwar ließen Versuche, die besonders gemacht wurden, um festzustellen, ob das Resultat verschieden ausfällt, wenn diese Belegungen das eine Mal isoliert bleiben und das andere Mal abgeleitet sind, oder wenn überhaupt keine Belegungen angebracht sind, einen Unterschied nicht erkennen; doch schien es mir angezeigt zu sein, nicht nur die Belegungen anzubringen, sondern sie auch bei den Bestimmungsversuchen zur Erde abzuleiten. Denn unbeeinflußt bleiben die Seitenflächen, wahrscheinlich infolge ungleichmäßiger Temperaturänderungen in Turmalin nicht. Folgende Versuche ließen das deutlich erkennen. Es wurden beide Turmalinpole und die untere Seitenbelegung dauernd geerdet, die obere Seitenbelegung dagegen mit dem Elektrometer, dessen Ladungsempfindlichkeit etwa verzehnfacht war, in Verbindung gesetzt. Dann wurde der Turmalinbehälter durch Bäder von  $0^{\circ}$  auf ca.  $35^{\circ}$  er-

wärmt und währenddessen beobachtet, ob die Seitenbelegung Pyroelektrizität lieferte. Es ergab sich im Anfang der Erwärmung ein verhältnismäßig rasch entstehender Ausschlag von + 3,5 Skt., (NB. der benachbarte Pol hätte ebenfalls positive Ausschläge gegeben), der langsam zurückging und am Schluß der Erwärmung vollständig verschwunden war. In diesem Fall hat somit von einer konstanten Temperatur bis zur anderen eine vollständige Kompensation der auftretenden Elektrizitäten stattgefunden.

Bei dem nun folgenden Abkühlungsversuch auf 0° wurde anfänglich wieder ein positiver Ausschlag von + 9,5 Skt., also viel größer als vorher beobachtet, der aber auch wieder ziemlich gut durch eine negative Ladung im Laufe der Zeit kompensiert wurde. Um einen Anhaltspunkt für den Betrag der erzeugten Elektrizitäten zu haben, sei erwähnt, daß die gleiche Temperaturänderung an einem Pol eine Elektrizitätsmenge erzeugt hätte, die einem Ausschlag von ca. 260 Skt. entspräche. Daß in beiden Fällen bei Erwärmung und bei Abkühlung gleichartige Elektrizitäten entstanden, scheint mir darauf hinzudeuten, daß die ungleichmäßige Erwärmung, die die Ursache der Elektrizitätsentwickelung überhaupt sein soll, sehr durch Luftströmungen bedingt ist.

Ob nun diese Elektrizitätsentwickelung imstande ist, bei unbelegten Seitenflächen die Resultate der pyroelektrischen Messung zu beeinflussen, darüber kann ich nichts mit Sicherheit sagen; denn wenn auch, wie gezeigt wurde, während der vorgenommenen Temperaturänderung von einem Bad zum anderen eine Kompensation der auftretenden Elektrizitätsmengen eintreten könnte, so wäre es doch andererseits auch wohl möglich, daß bei unbelegten Seitenflächen während der ersten Periode des Versuchs, wo die Temperatur sich rasch ändert, Spannungen auftreten, für die die Isolationsfähigkeit des Turmalins nicht mehr ausreichen würde, und daß so zu der Polbelegung Ladungen gelängen, die die dort zu messende Ladung fälschlich vergrößerten oder verkleinerten. Wie erwähnt, habe ich gegen diese mögliche Fehlerquelle als Schutzmittel das Anbringen von geerdeten Seitenbelegungen angewendet.

Da von vornherein die Möglichkeit nicht ausgeschlossen war, daß bei den starken, vorgenommenen Temperaturänderungen

durch eine Deformation der isolierten Metallteile in der den Turmalin enthaltenden Hülle, insbesondere des Zuleitungsdräts durch Reibung an dem isolierenden Hartgummi Reibungselektrizität entstehen und zum Pol gelangen konnte, wurde ein Abkühlungsversuch von Zimmertemperatur auf die Temperatur des Kohlendioxydbades gemacht, nachdem der Turmalin herausgenommen war. Es ergab sich aber dabei keine merkliche Elektrizitätsentwicklung.

Ich gebe nun im folgenden die Resultate der Beobachtungen an, und zwar in der Reihenfolge, in der die Versuche gemacht wurden.

Tabelle 2.

Erste Versuche mit Turmalin Nr. X (Anfang 1912 gemacht).

Versuchsnummer	Temperaturänderung	Kompensier. Belastung des Piezoquarzes	Bemerkungen
1 a	von $0,0^\circ$ auf $-79,0^\circ$ (B.) <sup>1)</sup>	2325 g	Seitenfläch. geerdet
1 b	„ $-79,0^\circ$ „ $0,0^\circ$	2330 g	„ „
2 a	„ $0,0^\circ$ „ $-79,0^\circ$ (B.)	2345 g	„ „
2 b	„ $-79,0^\circ$ „ $0,0^\circ$	2340 g	„ „
3 a	„ $0,0^\circ$ „ $-79,1^\circ$ (P.T.)	2322 g	„ „
3 b	„ $-79,1^\circ$ „ $0,0^\circ$	2327 g	„ „
4	von $0,0^\circ$ auf $-193,5^\circ$ (P.T.)	4043 g	Seitenfläch. geerdet
5 a	„ $0,0^\circ$ „ $-191,5^\circ$ (P.T.)	3973 g	„ „
5 b	„ $-191,5^\circ$ „ $0,0^\circ$	3971 g	„ „
6 a	„ $0,0^\circ$ „ $-191,0^\circ$ (P.T.)	3993 g	„ „
6 b	„ $-191,0^\circ$ „ $0,0^\circ$	4024 g	„ „
7 a	„ $0,0^\circ$ „ $-191,5^\circ$ (P.T.)	3960 g	„ isoliert
7 b	„ $-191,5^\circ$ „ $0,0^\circ$	3977 g	„ „
8	von $+40,50^\circ$ auf $0,0^\circ$	1492 g	Seitenfläch. geerdet
9	„ $+40,65^\circ$ „ $0,0^\circ$	1505 g	„ „
10	„ $+40,80^\circ$ „ $0,0^\circ$	1522 g	„ „
11	„ $+40,60^\circ$ „ $0,0^\circ$	1515 g	„ „
12	„ $+40,65^\circ$ „ $0,0^\circ$	1520 g	„ „

Dauer der Anwendung eines jeden Bades von konstanter Temperatur („Versuchsdauer“), 40-60 Minuten.

1) B. bedeutet, daß die Temperatur aus dem Barometerstand entnommen, P.T. daß sie mit dem Pentanthermometer gemessen wurde. Die

Tabelle 2 (Fortsetzung).

Spätere Versuche mit Turmalin Nr. X nach seiner Verkürzung  
(Herbst 1913 gemacht).

Versuch nummer	Temperaturänderung	Kompensier. Belastung des Piezoquarzes	Bemerkungen
13a	von $0,0^{\circ}$ auf $-184,5^{\circ}$ (P.T.)	3928 g	Versuchsdauer 35 Min. Seitenflächen
13b	„ $-184,5^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	3956 g	„ 40 „
14	$0,0^{\circ}$ „ $-184,0^{\circ}$ (P.T.)	3942 g	„ 35 „
15a	$0,0^{\circ}$ „ $-184,0^{\circ}$ (P.T.)	3924 g	„ 35 „
15b	„ $-184,0^{\circ}$ „ $-194,0^{\circ}$ (P.T.)	67 g	„ 17 „
15c	„ $-194,0^{\circ}$ „ $-184,0^{\circ}$ (P.T.)	80 g	„ 17 „
15d	„ $-184,0^{\circ}$ „ $-194,0^{\circ}$ (P.T.)	67 g	„ 17 „
15e	„ $-194,0^{\circ}$ „ $-184,0^{\circ}$ (P.T.)	82 g	„ 17 „
15f	„ $-184,0^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	3973 g	„ 51 „ geordert
16a	von $0,0^{\circ}$ auf $-79,5^{\circ}$ (P.T.)	2380 g	Versuchsdauer 60 Min.
16b	„ $-79,5^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	2373 g	„ 60 „

Ich will nun die letzten Versuche mit flüssiger Luft zuerst verwerten, weil ihr Ergebnis für die Beurteilung der anderen gebraucht werden soll. Es hatte sich bei diesen in letzter Zeit angestellten Versuchen herausgestellt, daß das Elektrometer einen selbständigen Gang durch Aufnahme von positiver Elektrizität, wahrscheinlich infolge von ionisierter Luft, besitzt (was schon oben mitgeteilt wurde). Das zeigt sich nun auch gut in der Versuchsreihe 15. Es standen zwei Luftbäder zur Verfügung, das eine enthielt viel Sauerstoff (von der Firma C. Linde bezogen), das andere war frisch im Institut hergestellt; infolgedessen hatten wir zwei Bäder von der recht konstanten Temperatur  $-184,0^{\circ}$  und  $-194,0^{\circ}$ ).<sup>1)</sup> Die beiden Abkühlungsversuche (15b und 15d) ergaben als kompensierende

durch die Buchstaben a, b usw. unterschiedenen Versuche folgten unmittelbar aufeinander. Eine 2,5 pro Mille betragende Verschiedenheit der Längen der beiderseitigen Belegungen des Piezoquarzes ist bereits berücksichtigt.

1) Bei diesen Messungen wird der Ablesungsfehler des Thermometers kaum  $0,1^{\circ}$  überstiegen haben.

Belastung 67 g; die beiden Erwärmungsversuche (15c und 15e) dagegen im Mittel 81 g. Daraus können wir nun zunächst entnehmen, daß die unbeabsichtigte Zufuhr von positiver Elektrizität zum Elektrometer usw. in der Versuchsdauer von 17 Minuten durch  $(81 - 67):2 = 7$  g Belastung kompensiert werden konnte. Ein direkter Versuch über den selbständigen Gang des Elektrometers bestätigte dieses Ergebnis. Mit diesem Wert machen wir nun den Versuch 15a und 15f sowie 13a und 13b frei von diesen Fehlern und erhalten die beiden kompensierenden Belastungen 3938 g resp. 3952 g und 3942 g resp. 3940 g für eine Temperaturänderung von  $0,0^\circ$  auf  $-184,0^\circ$  resp. auf  $-184,5^\circ$ . Wir verfahren ebenso mit den Versuchsergebnissen 16a und 16b, da diese Versuche bald auf die vorhergehenden folgten, und erhalten die kompensierenden Belastungen 2355 g, resp. 2354 g für eine Temperaturänderung von  $0,0^\circ$  auf  $-79,5^\circ$ . Bei den früheren Versuchen können wir nicht ebenso verfahren, da sie zum Teil zu einer ganz anderen Zeit — es liegen fast  $1\frac{3}{4}$  Jahre zwischen den ersten und den letzten Versuchen — angestellt wurden und da der Gang des Elektrometers nicht immer beobachtet wurde. Indessen gehen wir auch hier nicht fehl, wenn wir aus den Resultaten der zusammengehörigen Abkühlungs- und Erwärmungsversuchen das Mittel nehmen, denn in einem Falle vermehrt der Gangfehler das Resultat, im anderen Falle vermindert er dasselbe. Dieses Verbesserungsverfahren kann nicht bei den Versuchen zwischen  $0^\circ$  und ca.  $40^\circ$  angewendet werden, da hier nur Abkühlungsversuche gemacht werden konnten. Es ist das aber auch nicht nötig, weil eine damals gemachte Beobachtung keinen Gang des Elektrometers erkennen ließ, was schon oben erwähnt wurde.

Aus den Versuchen 15b bis 15e wollen wir aber noch weiter entnehmen, daß eine Temperaturänderung von  $10,0^\circ$  in der Nähe von  $-189^\circ$  eine Menge Pyroelektrizität erzeugt, die durch eine Belastung am Piezoquarz von 74 g kompensiert werden kann. Mit dieser Zahl können wir dann alle Versuche in der Nähe dieser Temperatur auf eine gleiche  $-194,0^\circ$  reduzieren. Die Versuchsergebnisse aus den Intervallen  $0^\circ$  bis ca.  $40^\circ$  und  $0^\circ$  bis ca.  $79^\circ$  reduzieren wir durch geradlinige Interpolation auf die Intervalle  $0,0^\circ$  bis  $40,5^\circ$  resp.  $0,0^\circ$  bis  $79,0^\circ$  und erhalten dann Tab. 3.

Tabelle 3.

## Turmalin X.

Versuchs- nummer	Temperaturänderung	Kompensierende Be- lastung des Piezoquarzes
8	von $+40,50^{\circ}$ auf $0,0^{\circ}$	1492 g
9.	„ $+40,50^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	1499 g
10	„ $+40,50^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	1511 g
11	„ $+40,50^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	1511 g
12	„ $+40,50^{\circ}$ „ $0,0^{\circ}$	1514 g
		Mittel 1505 g
1 a und 1 b	von $0,0^{\circ}$ auf $-79,0^{\circ}$	2328 g
2 a „ 2 b	„ $0,0^{\circ}$ „ $-79,0^{\circ}$	2343 g
3 a „ 3 b	„ $0,0^{\circ}$ „ $-79,0^{\circ}$	2322 g
16 a „	„ $0,0^{\circ}$ „ $-79,0^{\circ}$	2340 g
16 b „	„ $0,0^{\circ}$ „ $-79,0^{\circ}$	2333 g
		Mittel 2333 g
5 a und 5 b	von $0,0^{\circ}$ auf $-194,0^{\circ}$	3991 g
6 a „ 6 b	„ $0,0^{\circ}$ „ $-194,0^{\circ}$	4030 g
13 a „ 13 b	„ $0,0^{\circ}$ „ $-194,0^{\circ}$	4012 g
15 a „	„ $0,0^{\circ}$ „ $-194,0^{\circ}$	4012 g
15 f „	„ $0,0^{\circ}$ „ $-194,0^{\circ}$	4026 g
		Mittel 4014 g
15 b bis 15 e	von $-184,0^{\circ}$ auf $-194,0^{\circ}$	74 g

Die Übereinstimmung in den zusammengehörenden Werten der Tabelle ist nicht so gut, wie ich hoffte und wie sie sich nach meiner Überzeugung auch erreichen ließe. So besteht z. B. in den für die Temperaturerniedrigung von  $0,0^{\circ}$  auf  $-194,0^{\circ}$  gefundenen Belastungen eine Differenz von 39 g; das macht zwar von der ganzen Belastung nur 1 Proz. aus, ist aber doch auffallend viel in Anbetracht der oben erwähnten Tatsachen, daß das Meßinstrument — das Elektrometer — Belastungsdifferenzen von 1 g noch anzuzeigen vermag. Welche von den oben besprochenen Fehlerquellen die größte Rolle gespielt hat, ist fraglich geblieben; am meisten Verdacht habe ich auf den im Anfang der Untersuchung zu wenig beachteten Fehler, der durch eine Selbstaufladung des Leitersystems im Verlauf eines Versuchs entsteht. Ich möchte aber erwähnen, daß in der Tabelle kein nicht verunglückter Versuch weggelassen wurde, also auch nicht die ersten von jeder Versuchsreihe, die vielleicht etwas unsicherer sind als die folgenden, weil im Anfang noch verschiedene kleinere Erfahrungen zu

machen waren. Eine Veranlassung, noch besser übereinstimmende Werte zu erhalten, habe ich indessen nicht gehabt; die Resultate reichen vorläufig aus, um über den Verlauf der pyroelektrischen Konstante mit der Temperatur eine Vorstellung zu erhalten, und das ist alles, was ich vorläufig erreichen wollte. Die pyroelektrische Konstante ist von einem

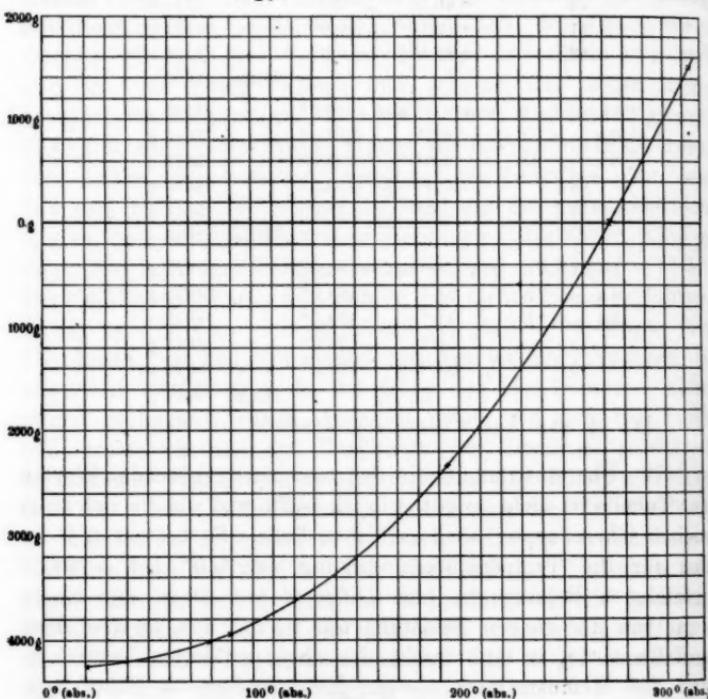


Fig. 2.

Turmalinexemplar zum anderen im allgemeinen so sehr verschieden, daß es irreführend wäre, einen Wert dafür als Materialkonstante anzugeben, wie es z. B. für die piezoelektrische Konstante des Quarzes gemacht werden kann.

Aus der Fig. 2, die die Werte der Tabelle 3 und außerdem ein Wertepaar bei  $20,5^{\circ}$  (abs.), von dem nachher die Rede sein wird, enthält, erkennt man wohl am besten, daß unsere Versuche folgende Resultate lieferten. Die pyroelektrische Konstante des untersuchten Turmalins nimmt mit abnehmender

Temperatur beträchtlich ab.<sup>1)</sup> Sie ist bei der Temperatur der flüssigen Luft ca. sechsmal kleiner als bei Zimmertemperatur. Ohne einen besonderen Zwang kann man die Kurve bis zum absoluten Nullpunkt der Temperatur so fortsetzen, daß sie dort parallel mit der Temperaturachse verläuft; das würde dann natürlich heißen, daß beim absoluten Nullpunkt die pyroelektrische Konstante unseres Turmalins gleich Null wäre. Eine solche Extrapolation ist aber bekanntermaßen mit dem nötigen Vorbehalt zu machen.

Ein Versuch, alle Beobachtungen durch einen Ausdruck von der Form  $M_T = f(T)$ , wo  $M_T$  das durch eine Erwärmung von  $0^\circ$  auf  $T^\circ$  (abs.) erzeugte pyroelektrische Moment bedeutet, darzustellen, führte zu keinem befriedigenden Resultat; am besten paßte der Ausdruck  $M_T = aT + bT^2$ . Die Berechnung der Konstanten  $a$  und  $b$  dieser Gleichung führte zu Werten, die für ein wenig unterhalb der Temperatur der flüssigen Luft gelegene Temperatur die pyroelektrische Konstante  $dM_T/dT = 0$ , folglich einen bei dieser Temperatur stattfindenden Polwechsel des Turmalins bedingen würden. Bleekrode<sup>2)</sup> berichtet in der Tat, daß er bei Erwärmung eines Turmalinstäbchens, das vorher durch Eintauchen in flüssiger Luft abgekühlt war, einen Polwechsel beobachtet habe. Beide Andeutungen für das Vorhandensein einer so bemerkenswerten Erscheinung gaben mir Veranlassung zu dem Wunsch, mit dem Turmalin Nr. X einen Versuch in dem Intervall der Temperatur des flüssigen Wasserstoffes und der flüssigen Luft zu machen. Hr. O. Wiener gestattete in liebenswürdigster Weise, daß mein Assistent Dr. Freiherr du Prel im Leipziger Physikalischen Institut diesen Versuch ausführte. Ich möchte nicht verfehlen, auch an dieser Stelle Hrn. Wiener für seine große Bereitwilligkeit meinen herzlichsten Dank zu sagen. Über das Resultat dieses Versuchs wird im folgenden berichtet.

Nach einigen mit Rücksicht auf die thermischen Eigenschaften des flüssigen Wasserstoffes nötigen kleineren Abänderungen des oben beschriebenen für die Aufnahme des Turmalins bestimmten Gehäuses — ein tieferes Eintauchen des

1) Für höhere Temperaturen hat bereits Hr. Riecke eine Abnahme mit abnehmender Temperatur gefunden, Wied. Ann. 40. p. 308. 1890.

2) Bleekrode, Ann. d. Phys. 12. p. 222. 1903.

Apparates bis zur Mitte des schlecht leitenden Porzellanrohres in die Badflüssigkeit und eine Füllung mit trockenem Wasserstoff waren unter anderem erforderlich — und nach einem nur zur Hälfte gelungenen Vorversuch konnte ein definitiver Abkühlungs- und Erwärmungsversuch zwischen den Temperaturen 79,5 und 20,5° (abs.) ausgeführt werden, der folgendes ergab:

1. Bei der recht langsam vorgenommenen Temperaturänderung zeigte sich in keinem Fall ein Polwechsel,

2. die kompensierende Belastung des Piezoquarzes betrug beim Abkühlungsversuch 242 g, beim Erwärmungsversuch 241,5 g, (das Elektrometer war empfindlicher gestellt als bei den früheren oben erwähnten Versuchen.) An der Tab. 3 auf p. 757 ist somit noch folgender Zusatz anzubringen:

Versuchsnummer	Temperaturänderung	Kompensierende Belastung des Piezoquarzes
18a und 18b	von -193,5 auf -252,5°	242 g

Auch diese Werte sind in die Fig. 2 eingetragen und es zeigt sich, daß der oben gezogene Schluß, die Neigung der  $(T, M_T)$ -Kurve gegen die  $T$ -Achse nehme bei sinkender Temperatur immer mehr ab, um bei  $T = 0$  gleich Null zu werden, was ein Verschwinden der pyroelektrischen Konstante  $dM_T/dT$  bei dieser Temperatur bedeuten würde, eine neue Begründung erhalten hat.

Um den ungefährten Verlauf dieser Konstante in dem benutzten Temperaturintervall von 20,5—313,5° (abs.) kennen zu lernen, könnte man die Werte aus der Kurve durch ein graphisches Verfahren ableiten; ich habe es vorgezogen, zu versuchen, die beobachteten Werte durch eine Gleichung darzustellen, wenn auch zuzugeben ist, daß die Bestimmung der  $dM_T/dT$ -Werte aus einer Interpolationsgleichung immer mit einiger Vorsicht aufgenommen werden muß. Alle Wertepaare durch eine einzige Gleichung in befriedigender Weise darzustellen, ist mir nicht gelungen, dagegen lassen sich die Beobachtungen mit den Temperaturintervallen 313,5—273° (abs.) resp. 273—194° (abs.) durch den Ausdruck

(a)

$$M_T = 0,06328 T^2$$

und die Beobachtungen mit den Intervallen  $194-79^{\circ}$  (abs.),  $89-79^{\circ}$  (abs.) und  $79,5-20,5^{\circ}$  (abs.) durch den Ausdruck

$$(b) \quad M_T = 0,01308 T^2,^{26}$$

recht gut darstellen, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Tabelle 4.

	Aus (a) berechnet	Beobachtet
$M_{313,5^{\circ}} - M_{273,0^{\circ}} =$	1508 g	1505 g
$M_{273,0^{\circ}} - M_{194,0^{\circ}} =$	2335 g	2333 g
	Aus (b) berechnet	Beobachtet
$M_{194,0^{\circ}} - M_{79,0^{\circ}} =$	1682 g	1681 g (= 4014-2333 g)
$M_{89,0^{\circ}} - M_{79,0^{\circ}} =$	78 g	74 g
$M_{79,5^{\circ}} - M_{20,5^{\circ}} =$	242 g	242 g

Aus den Gleichungen (a) und (b) berechne ich dann die gewünschten Werte von  $dM_T/dT$ , wobei sich sofort der Mangel der gewählten Darstellung schon daran zeigt, daß für diesen Quotienten bei der Temperatur  $T = 194^{\circ}$  (abs.) zwei um ca. 9 Proz. verschiedene Werte erscheinen, je nachdem die Gleichung (a) oder (b) benutzt wird. Das Mittel aus beiden Werten wurde als wahrscheinlich richtigsten Wert betrachtet. In der folgenden Tabelle sind die Werte von  $dM_T/dT$  mit den aus ihnen berechneten pyroelektrischen Konstanten in absolutem Maße zusammengestellt. Diese Berechnung geschah durch Multiplikation mit:

$$k \frac{L}{l} \frac{1}{p} 10^{-3},$$

wo  $k$  die auf Kilogrammgewicht bezogene Curiesche Konstante (= 0,0681)  $L$  und  $l$  die in Betracht kommenden Dimensionen des benutzten Piezoquarzes ( $L = 5,990$  cm,  $l = 0,0602$  cm) und  $q$  den aus Wägungen bestimmten Querschnitt des Turmalinstäbchens (= 0,2438 qcm) bedeutet.<sup>1)</sup>

1) Eine Kontrolle dafür, daß die beiden Endflächen des mit seinen natürlichen Seitenflächen versehenen Kristalles nicht merklich voneinander verschieden waren, lieferte die Beobachtung, daß die Werte der von einer bestimmten Temperaturerhöhung erzeugten elektrischen Momente gleich ausfielen, welche Endfläche auch mit dem Elektrometer verbunden war. Die Änderung des Querschnittes mit der Temperatur kann unberücksichtigt bleiben.

Tabelle 5.

T (abs.)	t in $^{\circ}$ C	Pyroelektrische Konstante von Turmalin Nr. X	
		in g Belastung	in absolutem Maße
313,5 $^{\circ}$	+ 40,5 $^{\circ}$	39,7	1,10
273,0 $^{\circ}$	0,0 $^{\circ}$	34,6	0,96
194,0 $^{\circ}$	- 79,0 $^{\circ}$	23,6	0,66
79,0 $^{\circ}$	- 194,0 $^{\circ}$	7,27	0,20
20,5 $^{\circ}$	- 252,5 $^{\circ}$	1,32	0,037
0,0 $^{\circ}$	- 273,0 $^{\circ}$	vermutlich = 0.	

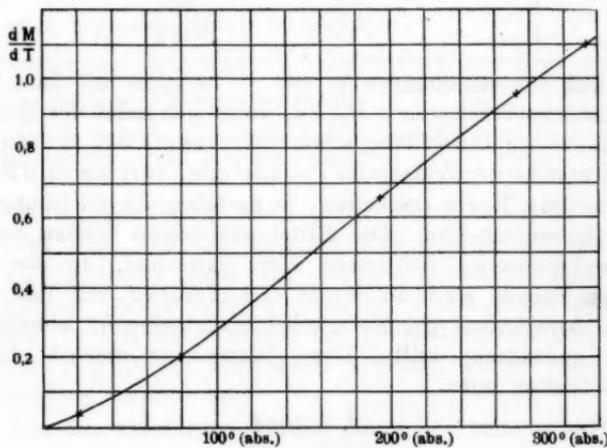


Fig. 8.

In Fig. 8 sind diese Werte eingetragen. Die so erhaltene Kurve zeigt wohl am besten, daß die pyroelektrische Erregung unseres Turmalins auch zu den in den letzten Jahren mehrfach untersuchten Erscheinungen gerechnet werden muß, die bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt der Temperatur allmählich bis zum gänzlichen Verschwinden geringer werden, und zwar zuletzt in abnehmendem Tempo. Die gezeichnete Kurve hat einen Wendepunkt; ob dieser Eigenschaft eine wirkliche Bedeutung zukommt, kann ich nicht mit voller Sicherheit sagen. Doch halte ich nach einer Abschätzung der vorhandenen

Fehlerereinfüsse der die Realität dieses Punktes für sehr wahrscheinlich.

Von allen übrigen hier in Betracht kommenden Eigenschaften des Turmalins: thermische Ausdehnungskoeffizienten, Elastizitätsmodulen und piezoelektrische Modulen dürfte es wohl nur die erstgenannte sein, deren Verhalten bei Temperaturänderung dem der pyroelektrischen Konstante ähnlich ist.

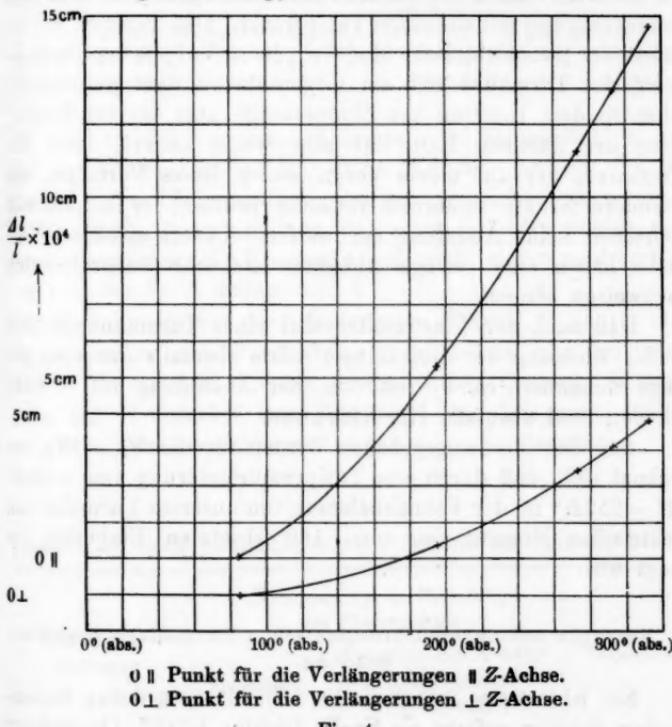


Fig. 4.

Nach der Fizeauschen Methode im hiesigen Institut angestellte Versuche über die Änderung der linearen Ausdehnungskoeffizienten von zwei Turmalinen (Nr. III und IV) mit der Temperatur haben Resultate ergeben, von deren zahlenmäßiger Angabe ich wegen noch vorhandener kleinerer Unstimmigkeiten einstweilen absehen möchte, die aber für den mit Nr. X gleichgefärbten Turmalin Nr. III in Fig. 4 dargestellt sind. Die

obere Kurve gibt die beobachteten auf die Längeneinheit reduzierten Längenänderungen in der Richtung der Hauptachse wieder, die untere die entsprechenden Längenänderungen in der Richtung senkrecht zur Hauptachse, in beiden Fällen von der Länge bei  $85^{\circ}$  (abs.) an gerechnet. Beide Kurven zeigen einen ähnlichen Verlauf wie die  $M_T$ ,  $T$ -Kurve der Fig. 2: ein bedeutendes Klemmerwerden des linearen Ausdehnungskoeffizienten (der Kurvenneigung) mit sinkender Temperatur. Daß dagegen, wie erwähnt, der piezoelektrische Modul  $d_{33}$  (nach Voigtscher Bezeichnung) des Turmalins sich im Gegensatz zu dem pyroelektrischen in dem Intervall von Zimmertemperatur bis zur Temperatur der flüssigen Luft nur sehr wenig ändert, fand Hr. Lissauer, der auf meine Veranlassung dieses Verhalten am Turmalin Nr. III seinerzeit vorläufig prüfte<sup>1)</sup>; er konnte mit Sicherheit keine Änderung nachweisen. Unsere späteren Versuche haben eine geringe Abnahme als sehr wahrscheinlich nachweisen können.

Daß auch der Elastizitätsmodul eines Turmalinstäbchens in der Richtung der dreizähligen Achse ebenfalls nur eine geringe Zunahme, ca. 4 Proz., bei der Abkühlung auf  $-194^{\circ}$  erleidet, fand ebenfalls Hr. Lissauer.

Aus den oben angegebenen Werten für die  $M_{T_1} - M_{T_2}$  berechnet sich, daß durch eine Temperaturänderung von  $+40,5^{\circ}$  auf  $-252,5^{\circ}$  in der Volumeneinheit von unserem Turmalin ein elektrisches Moment von rund 160 absoluten Einheiten erzeugt wird.

## 2. Versuche mit anderen brasilianischen Turmalinen derselben Sendung.

Ein fehlerfreies Stäbchen (Nr. IX) mit natürlichen Seitenflächen dunkler gefärbt als Nr. X, Dichte: 3,1467, Querschnitt aus Volumen: 0,1758 qcm, Länge: 2,43<sub>8</sub> cm war von Zeiss mit polierten zur Hauptachse senkrechten Flächen versehen, die versilbert wurden. Dasselbe lieferte folgende Werte.

1) W. Lissauer, Dissert. München 1907. Ein Gleichtes gilt für die piezoelektrische Konstante des Quarzes. Vgl. Kamerlingh-Onnes, Versl. d. kon. Ak. v. Wet. 21. p. 1280 und mein in Ann. d. Phys. 41. p. 492. 1913 erwähnter Versuch.

Tabelle 6.  
Versuche mit Turmalin Nr. IX.

Temperatur- änderung	Kompensierende Belastung des Piezoquarzes		Verhältnis
	beobachtet	Turmalin Nr. X hätte bei gleichem Querschnitt gebraucht	
von 0,0° auf +41,6°	1002 g	1116 g	0,90
„ 0,0° „ -184,0°	2402 g	2845 g	0,84

Die in der vorletzten Kolumne enthaltenen Zahlen und die Verhältniszahlen in der letzten Kolumne zeigen, daß der Turmalin Nr. IX wesentlich weniger pyroelektrisch erregbar ist als Nr. X, trotzdem, was hier schon bemerkt werden soll, seine piezoelektrische Konstante sich nicht sicher nachweisbar von der des Nr. X unterscheidet.

Ein aus dem hellen fehlerfreien Turmalin Nr. III von Zeiss geschnittenes Parallelipiped, vgl. p. 744, von den ungefährten Dimensionen  $4 \times 8 \times 8$  mm, dessen Querschnitt senkrecht zur Hauptachse aus Wägungen und Längenmessungen zu 0,3484 qcm bestimmt war, ergab folgende Resultate:

Tabelle 7.  
Versuche mit einem parallelipipedischen Präparat aus Turmalin Nr. III.

Temperatur- änderung	Kompensierende Belastung des Piezoquarzes		Verhältnis
	beobachtet	Turmalin Nr. X hätte bei gleichem Querschnitt gebraucht	
von 0,0° auf +40,8°	2124 g	2167 g	0,98
„ 0,0° „ -79,0°	3162 g	3366 g	0,94

Demnach ist auch der mit Nr. X gleichgefärbte Turmalin Nr. III etwas weniger pyroelektrisch erregbar als jener. Bei den beiden letzten Versuchen (mit Turmalin X und Turmalin III) ergibt sich übereinstimmend, daß die betreffenden Turmaline bei höherer Temperatur weniger in ihrem pyro-

elektrischen Verhalten von dem Turmalin X abweichen als bei tieferen Temperaturen. Das deutet darauf hin, daß bei noch höherer Temperatur die Unterschiede im Verhalten zweier Turmaline vielleicht verschwinden.

Schließlich haben wir noch Gelegenheit gehabt, zwei Stücke *dasselben* Kristalles auf ihr Verhalten zueinander zu untersuchen. Aus einem Turmalin Nr. VI dunkler Farbe war ein Parallelipiped ebenfalls von den ungefährnen Dimensionen  $4 \times 8 \times 8$  mm, dessen Querschnitt senkrecht zur Hauptachse 0,3202 qcm betrug, geschnitten und außerdem ein Stäbchen von 1,990 cm Länge und 0,1463 qcm Querschnitt. Sie lieferten folgende Resultate.

Tabelle 8.

	Temperatur-änderung	be-obachtet	Kompensierende Belastung des Piezoquarzes Turmalin Nr. X hätte bei gleichem Querschnitt gebraucht	Ver-hältnis
Parallelipiped .	von $0,0^\circ$ auf $-79,0^\circ$	2563 g	3073 g	0,83
Stäbchen . . .	, $0,0^\circ$ , , $-79,0^\circ$	1245 g	1404 g	0,88

Die letzte Tabelle zeigt, daß wieder der dunkle Turmalin weniger pyroelektrisch erregbar ist als der hellere, aber außerdem die für die quantitativen pyroelektrischen Untersuchungen des Turmalins keineswegs erfreuliche Tatsache, daß zwei Stücke desselben Kristalles, an denen sogar kein Farbenunterschied bemerkbar war, verschiedene pyroelektrische Eigenschaften haben können. Hr. Riecke hat bereits über einen ähnlichen Fall berichtet.<sup>1)</sup>

Der festgestellte große Einfluß, den Farbenunterschiede, somit Verschiedenheiten in der chemischen Zusammensetzung der Turmaline auf ihr pyroelektrisches Verhalten ausüben und die ebenfalls leicht zu beobachtende Tatsache, daß manche Turmaline, wenn auch nicht die unserigen, deutliche Farbennuancen in einem und demselben Kristall aufweisen, lassen

1) E. Riecke, Wied. Ann. 40. p. 304. 1890.

diese Verschiedenheit der beiden Präparate von Nr. VI erklärlich erscheinen. Da aber auch die Vermutung aufkam, es könnte in unserem Fall möglicherweise auch die Form einen Einfluß auf das Resultat ausüben — liefert doch z. B. auch das parallelipipedische Stück aus Nr. III ein etwas kleineres Resultat als das Stäbchen aus dem gleichgefärbten Nr. X — so wurde noch besonders festgestellt, daß auch das im Vergleich zum Stäbchen dickere, kürzere Paralleliped die Badtemperatur genügend genau angenommen hatte (vgl. p. 744 u. ff.), oben) und daß Versuche mit Seitenbelegung auch in diesem Fall denselben Wert lieferten wie solche ohne dieselben.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der für eine Temperaturänderung von  $0^\circ$  auf  $-79^\circ$  gefundenen kompensierenden Belastungen im Verhältnis zu der bei Turmalin Nr. X erhaltenen, und zwar auf gleiche Querschnitte reduziert.

Tabelle 9.

Turmalin:	Nr. X 0 hell	Nr. IX 0 dunkel	Nr. III □ hell
Verhältnis:	1,00	0,87	0,94
Turmalin:	Nr. VI □ dunkel,	Nr. VI 0 dunkel	
Verhältnis:	0,83	0,88	

### 3. Einige Versuche über die Pyroelektrizität von Quarzlamellen.

Oben (p. 742) bei der Besprechung des Curieschen Piezokerzapparates berichtete ich bereits kurz über die Wahrnehmung, daß die Quarzlamelle bei Temperaturänderungen eine Quelle von Elektrizität ist, die bei Benutzung dieses Apparates event. die Ursache von Fehlern sein könnte. Ich gestatte mir über diesen Gegenstand noch einige Mitteilungen zu machen.

Vor Jahren habe ich<sup>1)</sup> auf Grund von Versuchen gleichzeitig mit und unabhängig von Friedel und J. Curie<sup>2)</sup> die Ansicht geäußert, daß der Quarz bei absolut gleichmäßiger Erwärmung, d. h. ohne daß örtliche Temperaturverschiedenheiten vorkommen, keine Pyroelektrizität liefern könnte. Auch

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 19. p. 517. 1883.

2) C. Friedel u. J. Curie, Compt. rend. 96. p. 1389. 1883.

die später von Voigt<sup>1)</sup> und Riecke entwickelten Theorien schließen eine solche elektrische Erregung aus. Tatsache ist es aber, daß auch bei sehr langsam ausgeführten Temperaturänderungen in den Quarzlamellen dauernde elektrische Momente entstehen, die sich z. B. durch eine Ladung der Belegungen bemerkbar machen. Auch Hr. Kamerlingh-Onnes<sup>2)</sup> machte vor kurzem diese Beobachtung und stellte darüber bei sehr tiefen Temperaturen einige Versuche an. Man wird vielleicht sagen, daß die beobachtete Elektrizitätserregung dadurch bewirkt wird, daß die für ihr Ausbleiben notwendige Bedingung der örtlichen absoluten Temperaturgleichheit beim Erwärmen oder Abkühlen niemals erfüllt sein kann, und daß diese Erregung die beim Quarz bekannte von Deformationen, die die Temperaturungleichheiten hervorbrachten, erzeugte Erscheinung ist. So einfach lassen sich aber die beobachteten Tatsachen, die ich im folgenden angeben möchte, doch nicht erklären.

Übereinstimmend mit Hrn. Kamerlingh-Onnes fand ich, daß bei allen untersuchten Lamellen — es sind bisher vier verschiedene verwendet — die durch Zug oder Druck auf den breiten Seitenflächen erzeugte Elektrizität auch entsprechend bei Erwärmung oder bei Abkühlung auftritt. Ich habe weiter wahrgenommen, daß die erzeugte Menge Pyroelektrizität — so wollen wir sie vorläufig nennen — der Größe der Belegung proportional ist, und daß dieselbe die gleiche bleibt, mag die Abkühlung oder die Erwärmung sehr langsam oder beträchtlich rascher vorgenommen werden; und schließlich, daß die während einer Abkühlungs- resp. einer Erwärmungsperiode beobachtete Elektrizität während einer solchen Periode nicht wechselt. Die Ursache dieser Elektrizitätserregung ist mir unbekannt geblieben; ich habe darüber auch keine weiteren Versuche angestellt, und mich nur auf einige Messungen an zwei Quarzlamellen Nr. I und IV beschränkt.<sup>3)</sup> Zuerst wurde aber noch festgestellt, daß nicht etwa die an den Lamellen angebrachten

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, p. 235.

2) H. Kamerlingh-Onnes u. A. Beckman, Versl. d. Akad. v. Wetensch. Amst. 21. p. 1277. 1912.

3) Vgl. jedoch das weiter unten auf p. 770. 771. 772 Mitgeteilte!

Fassungen die Ursache der erzeugten Elektrizität waren. Es wäre nämlich wohl möglich gewesen, daß diese Fassungen bei den vorgenommenen Temperaturänderungen infolge der Verschiedenheit der Ausdehnungskoeffizienten von Quarz und Messing auf den Quarz einen Druck oder Zug ausgeübt hätten, der sich bis in das isoliert belegte Gebiet der Lamelle hinein verbreitet und dort Piezoelektrizität erzeugt hätte: eine Lamelle ohne Fassungen ergab aber die gleichen Resultate wie eine mit Fassungen.

Die erwähnten Messungen wurden so ausgeführt, daß die betreffende Piezoquarzlamelle an die Stelle des Turmalins in die beschriebene, aber passend verlängerte Hülse untergebracht und bekannten Temperaturänderungen durch Anwendung von Bädern verschiedener Temperatur unterworfen wurde. Die erzeugte Pyroelektrizität wurde wieder durch Belastung des Curieschen Apparates (Lamelle Nr. II:  $(Z/l) = 5,990/0,0602$ ) gemessen. Soviel Sorgfalt wie bei den Turmalinversuchen wurde namentlich auf die Herstellung möglichst genau bekannter Temperaturen nicht verwendet. In der folgenden Tabelle sind die Endresultate dieser Versuche angegeben.

Tabelle 10.

Piezoquarzlamelle Nr. I		Piezoquarzlamelle Nr. IV		Werte v. Nr. I auf die Temperatur- u. d. Fläche v. Nr. IV reduziert
Temperatur- änderung	Kom- pensier. Belast.	Temperatur- änderung	Kom- pensier. Belast.	
v. +15,0° auf -79,0°	49,5 g	v. +13,0° auf -79,0°	62 g	61 g
„ +38,5° „ 0,0°	15,0 g	„ +39,5° „ 0,0°	20 g	20 g

Die in der letzten Kolumne enthaltenen reduzierten Werte wurden mit Berücksichtigung der Größe der Flächenbelegungen — bei Nr. I ca.  $2,0 \times 5,0 = 10,0$  qcm, bei Nr. IV ca.  $2,5 \times 5,0 = 12,5$  qcm — erhalten. Sie zeigen, daß beide Lamellen sich auch quantitativ gleich verhielten, und daß die Erscheinung auch in dieser Beziehung eine durchaus regelmäßige ist.

Aus der Tabelle leitet man leicht ab, daß in dem Temperaturintervall von  $+13,0^\circ$  auf  $-79,0^\circ$  auf  $1^\circ$  Temperaturänderung im Mittel 0,66 g kompensierende Belastung kommen, in dem Intervall von  $+39,5^\circ$  bis  $0,0^\circ$  dagegen auf  $1^\circ$  nur

0,50 g. Bei sehr tiefen Temperaturen fand Hr. Kamerlingh-Onnes ein entgegengesetztes Verhalten: ein *Wachsen* der pyroelektrischen Konstante, ungefähr proportional der absoluten Temperatur. Demnach müßte bei einer zwischen dieser sehr tiefen und der Zimmertemperatur gelegenen Temperatur die pyroelektrische Erregbarkeit der Quarzlamellen am größten sein. Auch dieses Ergebnis, zu dem bisher kein Analogon bekannt ist, fordert, wie die Beobachtung der Entstehung von elektrischen Momenten an Quarz unter den vorhandenen Verhältnissen selbst, gewiß dazu auf, die Angelegenheit einer ausgedehnteren Prüfung zu unterwerfen.

Ich habe mir erlaubt, die obenstehenden Mitteilungen, die im Manuskript fertig geschrieben waren, auch zu veröffentlichen, trotzdem ihre Bedeutung durch das Folgende in sehr erheblichem Maße reduziert werden wird.

Um zu erfahren, ob die auf den Quarzlamellen befindliche Silberschicht vielleicht imstande wäre, das Resultat meiner Neubestimmung der Curieschen piezoelektrischen Konstante des Quarzes dadurch zu beeinflussen, daß diese Schicht tatsächlich einen Teil des auf die Lamelle ausgeübten Zuges übernimmt, hatte ich seinerzeit ihre Dicke, die, weil die Verhältnisse bei ihrer Herstellung immer ziemlich die gleichen blieben, von Fall zu Fall nicht sehr stark verschieden ist, gemessen und dafür den Wert ca.  $1/_{4000}$  mm gefunden. Daraus konnte ich schließen, daß die Anwesenheit dieser Schicht bei der Berechnung der genannten Konstante nicht berücksichtigt zu werden brauchte. Als ich mir aber später die Frage vorlegte, ob diese dünne Schicht auch für das Resultat der pyroelektrischen Versuche belanglos ist, fand ich nach einer einfachen Überschlagsrechnung, daß dies durchaus nicht der Fall zu sein braucht. Setzt man nämlich in diese Rechnung den Ausdehnungskoeffizienten des Silbers ( $184 \times 10^{-7}$ ) resp. den des Quarzes in der Richtung  $\perp$  zur Hauptachse (Längsrichtung der Lamelle) ( $137 \times 10^{-7}$ ), sowie den Elastizitätsmodul des Silbers (8000 kg/qmm) und die angegebene Dicke ( $1/_{4000}$  mm) und Breite ( $2 \times 25$  mm) der Silberschicht ein, so ergibt sich, daß bei einer Temperaturerhöhung oder -erniedrigung von z. B.  $80^{\circ}$  von dieser Schicht auf die Lamelle Nr. IV ein Zug resp. ein Druck ausgeübt wird, der eine recht merkliche piezoelektrische Erregung

hervorzubringen imstande ist, und zwar in dem Sinne, wie sie beobachtet wurde.

Experimentell ließ sich die Frage dadurch entscheiden, daß ich die oben angegebenen Versuche mit der Lamelle Nr. IV, nachdem sie jedesmal mit einer verschieden dicken Silberbelegung versehen war, wiederholte. Dabei ergab sich folgendes.

1. Der mittlere Teil der Lamelle war auf beiden Seiten äußerst schwach versilbert, so daß die Doppelschicht noch sehr durchsichtig war; die übrige Fläche war viel stärker, wieder wie früher versilbert, um dort die nötigen Verbindungen anlöten zu können. Von diesem mittleren Teil der Belegung war durch Isolierstreifen, wie es beim Piezoquarz üblich ist, ein Stück von ca. 5,0 cm Länge abgetrennt, jedoch so, daß an dem einen Ende desselben für das Anbringen einer Lötstelle, die die Verbindung mit dem Elektrometer usw. herstellen sollte, ein schmaler ca. 0,4 cm breiter Streifen aus der dickeren Belegung mit hineingenommen war. Der Mittelwert der kompensierenden Belastungen des Curieschen Piezoquarzes Nr. II, die bei einem Abkühlungs- resp. Erwärmungsversuch zwischen ca.  $+21^{\circ}$  und ca.  $-79^{\circ}$  gefunden wurden, beträgt 10 g. Ein Teil dieser Belastung ist nötig, um die auf dem dicker belegten Streifen entwickelte Elektrizität zu kompensieren; derselbe kann aus dem früheren Versuch (p. 769) berechnet werden und beträgt hiernach ca. 5 g. Die gesuchte, auf dem dünner belegten Teil der Lamellen entwickelte Elektrizität konnte demnach durch ca. 5 g kompensiert werden.

2. Die etwas dicker versilberte, sonst gleich behandelte Lamelle — die Doppelschicht war noch eben, blau durchsichtig — verlangte unter denselben Verhältnissen ca. 10 g kompensierende Belastung.

Stellen wir nun die mit Lamelle Nr. IV erhaltenen Resultate zusammen, so bekommen wir folgendes Bild von ihrem Verhalten:

Bei dickster (ca.  $1/4000$  mm), völlig undurchsichtiger Belegung braucht sie 60 g kompensierende Belastung,  
bei wesentlich dünnerer Belegung braucht sie 10 g kompensierende Belastung,  
bei dünnster Belegung braucht sie 5 g kompensierende Belastung.

Es ergibt sich somit die Tatsache, daß die Lamelle durch eine gleichbleibende Temperaturänderung eine um so geringere Menge Elektrizität lieferte, je dünner die angebrachte Belegung war. Da nun durch eine besondere piezoelektrische Prüfung nachgewiesen war, daß in allen Fällen die Belegung eine genügende Dicke hatte, um richtig zu funktionieren, so ist diese Tatsache eine Bestätigung des Ergebnisses der oben angedeuteten Überschlagsrechnung, und ich komme zu dem Resultat, daß die bei unseren Versuchen durch Temperaturänderung auf Quarzlamellen, nach Herstellung einer Temperaturgleichheit an allen Stellen der Lamelle, erhaltene Elektrizität sicher zum übergrößten Teil und sehr wahrscheinlich ganz piezoelektrischer Natur war, und zwar erzeugt durch Zug resp. Druck, den die Silberschicht infolge ihrer von der des Quarzes verschiedenen thermischen Ausdehnung bei Temperaturänderungen auf die Quarzlamelle ausgeübt hat.

Demnach werden die obigen Versuche nun nicht mehr als eine Stütze für die Möglichkeit, daß der Quarz infolge einer in allen Teilen gleichen Temperaturänderung eine elektrische Erregung zeigen kann, angeführt werden können. Sie sprechen eher zugunsten der eingangs kurz mitgeteilten Theorie und zeigen jedenfalls, wie scheinbar geringfügige Faktoren das Resultat pyroelektrischer Versuche wesentlich beeinflussen können.

#### 4. Piezoelektrische Versuche mit einigen Turmalinkristallen.

Zur Messung der an einem metallisch belegten Pol eines Turmalinkristalls entwickelten Piezoelektrizität wurde dasselbe Verfahren angewendet, das ich bei der Bestimmung der Curieschen Konstante gebrauchte: die aus Spannung und Kapazität bekannte Elektrizitätsmenge, die auf der Kollektorplatte eines Kondensators angehäuft ist, kompensiert die durch eine aufzusuchende Belastung erzeugte Menge Piezoelektrizität. Die Kompensation ist erreicht, wenn das zugeschaltene Edelmannsche Fadenelektrometer nach wie vor der Elektrizitätsentwicklung keinen Ausschlag zeigt.

Als Belastungs- resp. Entlastungsapparat diente anfänglich ein horizontales Tischchen, das durch einen Exzenter gehoben und gesenkt werden konnte, und auf dem der mit den nötigen Be-

legungen usw. versehene Turmalin mit seiner Hauptachse vertikal aufgestellt war. Wenn das Tischchen um eine kleine Strecke gehoben wurde, kam die obere Turmalinbelegung in Berührung mit dem unteren Ende einer durch leichte, seitlich angebrachte Führungen öllichen vertikal gehaltene Metallstange, die oben eine Scheibe trug, auf die Gewichte in zentrischer Lage aufgesetzt werden konnten. Bei weiterem Heben des Tischchens wurde diese Stange mit ihrer Belastung gehoben, so daß auf den gut justierten Turmalin in vertikaler Richtung ein meßbarer Druck ausgeübt wurde. Bei einer folgenden Abwärtsbewegung des Tischchens trat dann natürlich die entsprechende Entlastung des Turmalins ein.

Mit dem Exzenter verbunden war ein Kommutator, der auch später gebraucht wurde und deshalb hier beschrieben werden soll (Fig. 5). Auf der horizontalen Achse (*a*) des soeben erwähnten Exzenter ist durch eine Schraube (*s*) ein Hartgummizylinderchen (*h*) verstellbar befestigt, das eine geschlitzte Schleiffeder (*f*) trägt, die dauernd mit der Kondensatorplatte des Curieschen Kondensators leitend verbunden ist. Die Feder schleift bei der Drehung der Achse nacheinander auf zwei Messingstücken (*m*<sub>1</sub>) und (*m*<sub>2</sub>), die zu ihrer Isolation auf einer am Fuß des Belastungsapparats befestigten Hartgummiplatte (*p*) festgeschraubt sind. Da die Feder etwas schmäler ist als der Zwischenraum zwischen *m*<sub>1</sub> und *m*<sub>2</sub>, können diese beiden Stücke bei einer Drehung nicht in leitende Verbindung miteinander kommen. *m*<sub>1</sub> steht mit dem einen Pol eines Cadmiumelements in Verbindung, dessen anderer Pol geerdet ist, *m*<sub>2</sub> ist geerdet, oder umgekehrt. Bei der gezeichneten Stellung der Feder ist somit die Kondensatorplatte auf die Spannung des Cadmiumelements geladen; beim Drehen des

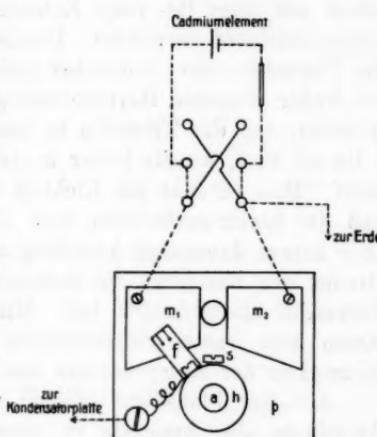


Fig. 5.

Exzenter im Sinne des Uhrzeigers wird dann diese Platte in dem Augenblick geerdet, wo die Feder in Berührung mit  $m_2$  kommt. Beim Zurückdrehen der Feder wird die Kondensatorplatte wieder geladen, wenn die Feder auf  $m_1$  angekommen ist. Jedesmal beim Entladen oder beim Laden wird auf der Kollektorplatte eine Menge Elektrizität frei, die, wenn diese Platte mit ihrem Ring auf die Spannung Null erhalten bleibt, in beiden Fällen gleich, aber entgegengesetzt ist; sie wird zur Kompensation der beim Be- resp. Entlasten des Turmalins erzeugten Piezoelektrizität verwendet. Damit die Influenzelektrizität und die Piezoelektrizität möglichst gleichzeitig auftreten, wird der die Feder tragende Hartgummiring so auf die Exzenterachse befestigt, daß der Turmalin in dem Augenblick belastet, resp. entlastet wird, wo die Feder in der Mitte zwischen  $m_1$  und  $m_2$  steht. Man erkennt die Richtigkeit der Kompensation daran, daß der Elektrometerfaden nur ein kurzes, geringes Zucken, aber keinen dauernden Ausschlag zeigt, nachdem durch rasches Drehen des Exzenter die Belastung resp. die Entlastung des Turmalins stattgefunden hat. Mit einer solchen Vorrichtung lassen sich rasch hintereinander mehrere Proben auf die Richtigkeit der Kompensation machen.

Aus der Planskizze (Fig. 6) ist wohl ohne weiteres die Anordnung der Apparate zu entnehmen; die mit „Rheostat“ und „Akkumulator“ bezeichnete Vorrichtung diente zur Prüfung der Voltempfindlichkeit des Elektrometers.

Die beschriebene Belastungsvorrichtung wurde später mit Ausnahme des Kommutators ersetzt durch eine andere Vorrichtung, weil es nicht so leicht war, sie so zu justieren, daß die oben auf die Stange aufgesetzte Belastung nicht einmal etwas schräg wirkte, was auf die entwickelte Piezoelektrizität einen sehr merklichen Einfluß ausüben konnte.

Bevor ich diesen neuen Apparat beschreibe, soll noch über eine andere Vorrichtung kurz berichtet werden, die ich verwendete, um den Einfluß der tiefen Temperatur der flüssigen Luft auf die piezoelektrische Konstante  $d_{33}$ , der schon von Lissauer untersucht wurde, zu prüfen und die ich auch verwenden zu können hoffte, um rasch zwei verschiedene Turmaline auf ihre piezoelektrische Erregbarkeit miteinander zu vergleichen. Bei ihm wurden zwei Turmaline gegeneinander

geschaltet dem gleichen Druck ausgesetzt. Zwei ungleichnamige Pole beider Turmaline wurden miteinander und mit dem Elektrometer verbunden, während die beiden anderen Pole geerdet waren. Das Elektrometer maß folglich die Differenz der piezoelektrischen Erregung beider Turmaline.

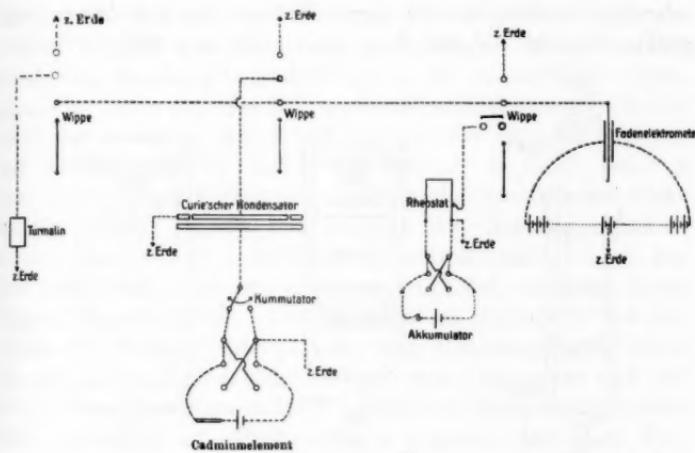


Fig. 6.

Dieser Gegenschaltungsapparat bestand in der Hauptsache aus zwei durch ein längeres Stängchen miteinander verbundenen Doppelbügeln, von denen der eine in der nachstehenden, perspektivisch gehaltenen Skizze (Fig. 7) abgebildet ist. Zwischen den beiden Platten je eines Bügelpaars wurde der betreffende Turmalin aufgestellt in einer Weise, wie Fig. 8 zeigt, die den Bügel 2 und die Platte des Bügels 1 in richtiger Anordnung darstellt. Eine später zu beschreibende Spitze mit Isolierzvorrichtung drückt auf eine Metallscheibe, die auf den Turmalin aufgelegt ist. Beide Bügelpaare hängen senkrecht untereinander an der Schneide des einen Armes eines Wagenbalkens, an dessen anderem Arm eine Wagschale für die Belastung angebracht ist. Der unterste Bügel ist mit der Unterlage, auf der die Wage steht, fest verbunden, so daß die Belastung auf die beiden Turmaline den gleichen Druck ausübt. Das untere Bügelpaar ist von einer Metallhülle umgeben, die in flüssige

Luft getaucht werden kann, so daß der untere Turmalin auf ca.  $-190^{\circ}$  abgekühlt wird, während der obere Zimmertemperatur behält. Bezüglich der näheren Einrichtung verweise ich auf die Beschreibung einer ähnlichen Anordnung, die ich Hrn. Lissauer seinerzeit angab.

Der große Nachteil, der die Verwendung dieses Apparats sehr beschränkte, besteht darin, daß es nur mit Anwendung größter Geduld — und dann noch kaum mit völliger Sicher-

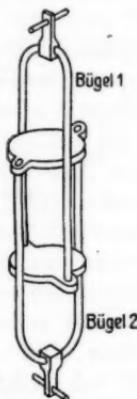


Fig. 7.



Fig. 8.

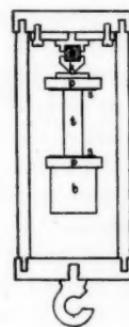


Fig. 9.

heit — durch häufig wiederholtes Probieren möglich ist, ihn so zu zentrieren, daß auf die Turmaline Drucke ausgeübt werden, die genau in der Richtung der Hauptachse stattfinden. Eine ähnliche Gegenschaltung habe ich bei den Curieschen Quarzlamellen, die nur auf Zug beansprucht werden, mit gutem Erfolg anwenden können.<sup>1)</sup>

Der zuletzt benutzte Belastungsapparat, wohl der beste, bestand aus einem kräftigen  $\square$ -förmigen Messingbalken mit rechteckigem Querschnitt ( $b$ ) (Fig. 9), dessen obere Fläche mit Hilfe von drei Fußschrauben und einer Dosenlibelle horizontal gestellt werden konnte. Auf dieser wurde nach Unterlegen von den nötigen Zwischenstücken — z. B. Stahlscheiben und Stanniolblättern — der Turmalin ( $t$ ) mit seiner einen eben geschliffenen, versilberten Endfläche aufgesetzt und zur Erde ab-

1) Vgl. Ann. d. Phys. 41. p. 495. 1913.

geleitet. Zu seiner Belastung diente ein Bügel von nebenstehender Form, an dem eine mit Gewichten beschwerte Schale angehängt werden konnte. Wie von dem Bügel der Druck auf den Kristall übertragen wurde, soll etwas ausführlicher beschrieben werden.

Bei solchen Versuchen, bei denen die gedrückte, metallisch belegte Kristallfläche zur Messung der entstehenden Piezoelektrizität mit dem Elektrometer verbunden ist — zur Beobachtung des Longitudinaleffektes — ist es natürlich unumgänglich, daß auch irgendwo ein Isolationskörper eingeschaltet wird, der ebenfalls dem Druck unterworfen ist. Es liegt somit die Gefahr nahe, daß durch ihn, sei es durch Reibung oder durch Druck Elektrizität entsteht, die ebenfalls der Elektrometerleitung zufließt und deshalb das Resultat falschen kann. Eine solche schädliche Elektrizitätsquelle ist in der Tat leicht vorhanden; wir haben sie möglichst vermieden durch folgende Konstruktion. Aus der Figur ist ersichtlich, daß der drückende Messingkonus (*k*) von dem Belastungsbügel durch ein auf beiden Seiten eingelassenes, genau passendes und mit wenig Wachskolophonumkitt eingekittetes Hartgummizylinderchen (*h*) isoliert ist. Probeversuche ergaben, daß diese Vorrichtung von dem angegebenen Fehler jedenfalls ziemlich frei ist, und um diesen Fehler dann noch ganz sicher zu eliminieren, wurde bei sehr vielen Versuchen die piezoelektrische Erregung gemessen, bei einer und dann bei der umgekehrten Stellung des Kristalles, so daß der Fehler durch Mittelnehmen aus beiden Beobachtungen herausfallen mußte. Größere Glimmerplättchen als Isolationsmaterial zu nehmen, ist unzweckmäßig, da dieser Körper durch Druck stark elektrisch werden kann; ebenso erwiesen sich größere zwischengelegte Hartgummischeiben als unzuverlässig. Die Spitze übertrug den Druck auf eine Stahlplatte (*p*), die mit einer Stanniolzwischenlage (*s*) auf der oberen Endfläche des Turmalins (*t*) auflag. Die untere Endfläche des Turmalins ruhte ebenfalls auf einer Stahlplatte mit Stanniolzwischenlage. In dieser Weise konnte eine möglichst gute Zentrierung wohl erreicht werden und die Gefahr einer schrägen Druckrichtung war beseitigt.

Zum Schutz gegen elektrostatische Fremdwirkungen war die ganze Vorrichtung von einer geerdeten Metallhülse umgeben.

Um den Turmalin abwechselnd zu be- resp. zu entlasten, wurde die Schale mit ihren Gewichten abwechselnd gesenkt, bis sie frei hing und dann wieder gehoben durch das mit drei Stellschrauben versehene Tischchen der Exzentervorrichtung, von der oben die Rede war. Der beschriebene Kommutator bewirkt auch hier fast gleichzeitiges Freiwerden von Piezoelektrizität am Turmalin und von Influenzelektrizität am Curieschen Kondensator. Die übrige Versuchsanordnung war dieselbe, die oben durch eine Skizze (Fig. 6) erläutert wurde.

Die untersuchten brasiliianischen Turmaline waren zum größten Teil noch mit ihren natürlichen Seitenflächen versehen und nur die Endflächen vor den definitiven Versuchen von der Firma Zeiss sorgfältig eben und senkrecht zu den Säulenflächen geschliffen; ihre metallische Belegung bestand aus einer auf nassen Wege hergestellten Silberschicht. Auf die Reinigung der Kristalle vor einem Versuche wurde wieder großes Gewicht gelegt. Sie geschah durch Behandlung mit Alkohol, Säure und destilliertem Wasser. Nach der Reinigung wurden die Kristalle nur noch mit einer Zange angefaßt. In dieser Weise behandelt, isolieren die Turmaline sehr gut; während der feuchten Jahreszeit wird man die Luft in der den Kristall zum Schutz gegen elektrische Wirkungen einschließenden Hülle durch Schwefelsäure trocknen.

Dickere Turmaline werden leicht durch Pyroelektrizität Störungen bringen können; man muß in allen Fällen einen möglichst guten Temperaturausgleich abwarten, bevor man zur  $d_{33}$ -Bestimmung übergeht; noch übrig gebliebene kleinere Differenzen sind bei dem angewendeten Beobachtungsverfahren, fast momentaner Kompensation der zu messenden Piezoelektrizität des Kondensators, bedeutungslos und ihr Einfluß kann auch, wenn er noch merklich sein sollte, durch Kombination der bei Belastung resp. Entlastung gefundenen Werte eliminiert werden. Daß durch die Belastungsänderungen selbst keine merkliche durch Pyroelektrizität sich äußernde Temperaturänderungen entstanden, davon haben wir uns überzeugt.

Als Kondensator wurde wieder der Curiesche gewählt (vgl. Ann. d. Phys. 41. p. 484ff. 1913) mit 0,4915 cm dicken Quarzscheibchen; seine Kapazität, die übrigens durch einen

Versuch mit dem Piezoquarz kontrolliert war, betrug dann 56,82 cm. Zur Ladung diente ein Cadmiumelement, dessen Spannung, 1,0184 Volt, mit der eines Normalelementes verglichen war.

Bereits bei der oben erwähnten Doktorarbeit von W. Lissauer hatten sich bei piezoelektrischen Versuchen mit Turmalin Unstimmigkeiten ergeben, die sich hauptsächlich darin äußerten, daß die erhaltenen piezoelektrischen Ladungen nicht den angewendeten Drucken proportional waren. Als Erklärung für dieses Ergebnis wurde eine ungleichmäßige Druckverteilung im Kristall, hervorgerufen durch Unebenheiten in den Endflächen der Kristalle, resp. in den aufgelegten den Druck übertragenden Plättchen, angenommen, und man hoffte damals durch Anwendung von kräftigen Anfangsbelastungen diese Störung verringern zu können, was aber wohl nur zum Teil gelungen sein dürfte. Zeit und Gelegenheit, dieser Sache näher nachzugehen, fehlten damals. Es hat sich nun bei der seither ausgeführten Prüfung der Methode, die zur Bestimmung des Moduls  $d_{33}$  verwendet werden sollte, gezeigt, daß das Resultat solcher Versuche sehr stark beeinflußt werden kann:

1. durch die Form der gedrückten Kristallflächen und der Fläche des Körpers, der den Druck auf den Kristall überträgt,

2. durch die Beschaffenheit der Seitenflächen des Kristalles.

Wie wir zu dieser Erfahrung gekommen sind, und welchen Einfluß die genannten Faktoren auf das Resultat ausüben können mag zunächst mitgeteilt werden. Die oben erwähnten Unstimmigkeiten führten zuerst zu der Fragestellung, ob bei den Versuchen zur Bestimmung von  $d_{33}$ , bei denen also in der Richtung der Hauptachse auf den Kristall ein gleichmäßig verteilter Druck ausgeübt werden soll, auch immer, wie es nach Voigts Theorie der Fall sein muß, an den druckfreien Seitenflächen keine elektrische Erregung auftritt. Um dies zu untersuchen, wurden an den Seitenflächen von säulenförmigen Kristallstücken, die mit eben abgeschliffenen, zur Säule senkrecht stehenden Endflächen versehen waren, metallische Silber- oder Stanniolbelegungen angebracht, die

diese Fläche bis auf zwei schmale Streifen an den Enden und einen Streifen in der Mitte ganz bedeckten. Durch geeignete Verbindungsdrähte konnten diese Belegungen, die Ringe genannt werden mögen, entweder einzeln mit der Erde oder mit einem Elektrometer oder auch mit den Endbelegungen leitend verbunden werden. Es ergab sich nun, daß diese Ringe nur in sehr seltenen Fällen bei Belastung oder Entlastung der verschiedenen Turmaline unelektrisch blieben; sehr häufig trat sogar eine starke Elektrisierung auf. Immer wurden die Ringe einander entgegengesetzt elektrisch; das eine Mal war aber jeder Ring mit seiner benachbarten Endfläche sowohl bei Belastung als bei Entlastung gleichnamig elektrisch, ein anderes Mal dagegen entgegengesetzt elektrisch. Welcher von diesen beiden Fällen eintrat, war, wie die weitere Untersuchung lehrte, bloß davon abhängig, wie der Druck auf die Endflächen ausgeübt wurde: War durch eine Konvexität der aufeinanderliegenden Flächen von Turmalin und druckvermittelnden Metallstücken oder durch eine etwas ungleichmäßig dicke Zwischenlage von Stanniolblättern die Ursache für einen mehr zentrisch wirkenden Druck gegeben — und es genügte dazu eine durch Lichtspiegelung kaum bemerkbare Konvexität oder eine nur  $1/100$  mm starke Verschiedenheit in der Dicke der Zwischenlage —, so trat an den Ringen eine Elektrisierung auf, die mit der der benachbarten Pole ungleichnamig war. Wenn dagegen durch eine Konkavität der Auflageflächen oder wieder durch eine Ungleichmäßigkeit in der Zwischenlage ein mehr peripherischer Druck ausgeübt wurde, so trat der andere Fall der Elektrisierung der Ringe ein.

Daraus geht hervor, daß die wahrgenommene Elektrisierung der Seitenflächen nicht etwa die Folge war von zufällig vorhandenen Verwachsungen, sondern von einer ungleichmäßigen Druckverteilung auf den Querschnitt der Kristalle, die eine inhomogene Deformation bewirkte.

Am deutlichsten sind diese Verhältnisse zu erkennen aus folgenden Versuchen, die zu diesem Zweck besonders ange stellt wurden: Als Kristall wurde der tadellose Turmalin Nr. I gewählt, nachdem die Endflächen von der Firma Zeiss sorgfältig senkrecht zur Säulenachse eben geschliffen und von uns versilbert waren. Seine Länge beträgt 2,05 cm und sein un-

gefähr in der Form eines gleichseitigen Dreieckes mit abgestumpften Ecken gebildeter Querschnitt beträgt 0,9844 qcm. Die natürlichen Seitenflächen, die, um eine gute Isolation zu erreichen, wie immer auf das sorgfältigste gereinigt waren, blieben bei den Versuchen entweder ganz unbedeckt oder waren mit einer Silberschicht belegt, die bis auf drei ca. 0,05 cm breite Isolierstreifen, die oben, unten und in der Mitte angebracht waren, die ganzen Seitenflächen bedeckte, so daß zwei „Ringe“ vorhanden waren. Zum Übertragen des Druckes konnten benutzt werden:

1. ein Paar runde Messingscheiben, die beide auf einer Seite sehr schwach konisch-konvex gedreht waren,
2. ein Paar gleiche, aber konkav geformt,
3. ein Paar sehr sorgfältig plangeschliffene runde Stahl scheiben.

Als Zwischenlage zwischen Scheiben und Turmalin diente eine 6- bis 8fache Stanniollage aus vorher sorgfältig geglätteten Blättern zusammengelegt oder auch in einigen Fällen ein Kissen aus Stanniolblättern mit einer Einlage von 0,025 cm dickem, weichem Kautschuk. Je nach der Verwendung von 1 oder 2 oder 3 fand die Belastung des Turmalins zentrisch oder peripherisch oder möglichst gleichmäßig auf den Querschnitt verteilt statt.

In den folgenden Tabellen sind nun die Versuchsresultate mitgeteilt. In der zweiten Kolumne steht die zum Kom pensieren der immer gleichbleibenden Influenzelektrizität des Curie-schen Kondensators nötige Belastung des Turmalins und in der dritten die aus dieser Belastung berechnete piezoelektrische Konstante  $d_{33}$ . Die Berechnung geschah mit dem Ausdrucke

$$d_{33} = \frac{\text{Kondensatorkapazität} \times \text{Spannung}}{\text{Belastung}} = \frac{56,82 \times 0,003395}{981 \times P},$$

wo  $P$  die Belastung in Gramm bedeutet. Letztere Werte sind eingeklammert, weil sie in den meisten Fällen die durch die Belastungsart gefälschte Größe dieser Konstante darstellen; aus ihnen soll entnommen werden, in welchem Grade eine solche Fälschung auftreten kann.

## Tabelle 11.

I. Turmalin Nr. I mit Seitenbelegungen („Ringen“) versehen.  
1. Druckübertragung durch konkave Messingplatten mit Stanniolzwischenlage.

	Belastung	Piezoelektr. Konst. $d_{33} \times 10^8$ in C.G.S.
a) Ringe isoliert . . . . .	4220 g <sup>1)</sup>	(4,66)
b) Ringe miteinander verbunden, isoliert .	4620 g	(4,26)
c) Ringe miteinander verbunden, geerdet .	4680 g	(4,20)
d) Oberer Ring isoliert, unterer geerdet .	3930 g	(5,00)
e) Ringe zu den betreffenden Polen geschaltet . . . . .	3350 g	(5,87)
f) Oberer Ring zum Pol geschaltet, unterer isoliert . . . . .	3820 g	(5,15)
g) Oberer Ring geerdet, unterer isoliert . . . . .	4880 g	(4,07)

Zur Beurteilung der Größe der Ringladungen im Vergleich zu den Polladungen wurden am Elektrometer bei zugeschaltetem, ungeladenem Kondensator — zur Vermeidung von zu großen Ausschlägen — die Ausschläge beobachtet, die eine Belastung von 1520 g erzeugten:  
Oberer Ring mit Elektrometer verbunden, unterer Ring und Pole geerdet . . . . . -1,7 Skt.  
Unterer Ring mit Elektrometer verbunden, oberer Ring und Pole geerdet . . . . . +1,7 „  
Oberer Pol mit Elektrometer verbunden, Ringe isoliert . . . . . -7,0 „

## 2. Druckübertragung durch konvexe Messingplatten mit Stanniolzwischenlage.

	Belastung	Piezoelektr. Konst. $d_{33} \times 10^8$ in C.G.S.
a) Ringe isoliert . . . . .	3200 g	(6,14)
b) Ringe miteinander verbunden, isoliert .	3020 g	(6,51)
c) Ringe miteinander verbunden, geerdet .	3000 g	(6,55)
d) Oberer Ring isoliert, unterer geerdet .	3320 g	(5,92)
e) Ringe zu den betreffenden Polen geschaltet . . . . .	3730 g	(5,27)
f) Oberer Ring zum Pol geschaltet, unterer isoliert . . . . .	3400 g	(5,78)
g) Oberer Ring geerdet, unterer isoliert . . . . .	2940 g	(6,69)

Größe der Ringladungen (vgl. oben):  
Oberer Ring mit Elektrometer verbunden, unterer Ring und Pole geerdet . . . . . +1,1 Skt.  
Unterer Ring mit Elektrometer verbunden, oberer Ring und Pole geerdet . . . . . -1,1 Skt.  
Oberer Pol mit Elektrometer verbunden, Ringe isoliert . . . . . -8,5 Skt.

1) Auf eine sehr genaue Bestimmung der Belastung wurde bei diesen Versuchen kein Wert gelegt; das Elektrometer ließ eine Mehrbelastung von 10 g noch gerade erkennen.

Versuche mit einer dauernden Anfangsbelastung von 2 kg ergaben im wesentlichen die gleichen Werte.

Ich möchte nun zunächst diese Versuche besprechen. Die berechneten Werte von  $d_{33}$  ergeben sich als sehr bedeutend abhängig von der Art der Belastung — ob peripherisch oder zentrisch — und weiter davon, wie die Seitenbelegungen verbunden sind. Die Werte schwanken zwischen  $4,07 \times 10^{-8}$  und  $6,69 \times 10^{-8}$ . Die größeren Werte wurden mit zentrischer Belastung erhalten. In beiden Fällen üben die Ringe ihren Einfluß in ziemlich regelmäßiger Weise aus, wie aus der folgenden Zusammenstellung, die die Abweichungen der beobachteten Belastungen von der wahrscheinlich richtigsten Belastung 3530 g (vgl. unten) enthält, ersichtlich ist.

Peripherischer Druck:

a	b	c	d	e	f	g
+ 690	+ 1090	+ 1150	+ 400	- 180	+ 290	+ 1300

Zentrischer Druck:

a	b	c	d	e	f	g
- 330	- 510	- 580	- 210	+ 200	- 180	- 590

Aus diesen Versuchen einen einigermaßen zuverlässigen richtigen Wert von  $d_{33}$  zu entnehmen, ist offenbar nicht möglich. Man wird vielleicht sagen, daß bei wirklichen Bestimmungsversuchen derartige Druckübertragungen, wie sie hier gebraucht wurden, nicht zu wählen sind, daß man vielmehr bestrebt sein wird, möglichst ebene Druckflächen anzuwenden um eine möglichst gleichmäßige Druckverteilung zu erreichen. Das ist natürlich zuzugeben, aber tatsächlich gelingt es kaum, so ebene Druckflächen an dem Kristall und an den drückenden Metallscheiben anzubringen und Stanniolblätter von so gleicher Dicke zu erhalten, daß mit Sicherheit keine ungleichmäßige Druckverteilung auftritt. Folgender Versuch mit dem gleichen Turmalin in gleicher Stellung angestellt (vgl. Tab. 12) mag das zeigen.

Man erkennt zunächst, daß trotz aller Vorsicht die Belastungswerte wieder verschieden ausfallen, je nach der Ringschaltung. Diese Ringeinflüsse sind zwar nicht so groß, wie bei 1. und 2., aber doch alle in demselben Sinne tätig wie

## Tabelle 12.

3. Druckübertragung durch vorzüglich plan geschliffene Stahlscheiben mit Zwischenlage von sorgfältig ausgewählten und noch besonders geglätteten Blättern von ungebrauchtem Stanniol.

	Belastung	Piezoelektr. Konst. $d_{33} \times 10^8$ in C.G.S.
a) Ringe isoliert . . . . .	3820 g	(5,43)
b) Ringe miteinander verbunden, isoliert .	3690 g	(5,33)
c) Ringe miteinander verbunden, geerdet .	3770 g	(5,22)
d) Ringe zu den betreffenden Polen geschaltet . . . . .	3480 g	(5,65)
Größe der Ringladungen durch 3530 g (vgl. oben).		
Oberer Ring mit dem Elektrometer verbunden, unterer Ring und Pole geerdet . . . . .		-1,2 Skt.
Unterer Ring mit dem Elektrometer verbunden, oberer Ring und Pole geerdet . . . . .		+0,1 Skt.
Oberer Pol mit dem Elektrometer verbunden, Ringe isoliert		-16,3 Skt. <sup>1)</sup>

dort. Der Druck muß peripherisch gewesen sein, zu urteilen nach dem Zeichen der Ringladung (gleichnamig mit der benachbarten Polladung) und daraus, daß die drei ersten Belastungswerte größer sind als der vierte (und auch als der vermutlich richtigste). Was die Ungleichheit in der Druckverteilung verursacht hat, ist nicht bekannt geworden; es sei in dieser Beziehung aber erwähnt, daß erfahrungsgemäß z. B. das dünnste, kleinste zwischengelegte Stanniolstückchen oder auch manchmal die Verwendung eines bereits einmal gebrauchten Stanniolpäckchens genügt, um sofort sehr merkliche Änderungen in dem Wert der Belastung, also auch von  $d_{33}$  hervorzubringen. In einem solchen Fall hilft auch die Anwendung einer dauernden Anfangsbelastung nur wenig.

Auch aus diesen Werten wird man noch keinen als den wahrscheinlich richtigsten für  $d_{33}$  wählen können. Der einzige Weg, um mit dem belegten Turmalin zu einem einigermaßen befriedigenden Wert von  $d_{33}$  zu gelangen, ist der, daß man an Zeit und Geduld nicht spart und vor einem eigentlichen Bestimmungsversuch die Stanniolzwischenlage oben und unten so lange verändert, bis bei Belastung resp. Entlastung des

1) Genaue Proportionalität von Spannung und Elektrometerrausschlag ist nicht vorhanden.

Turmalins die Ringe keinen nennenswerten Ausschlag am Elektrometer mehr geben oder, was auf dasselbe hinauskommt, bis ihre Schaltungsart keinen Einfluß auf den Belastungswert mehr ausübt.

Die Annahme, daß die Belastung dann möglichst gleichmäßig, also für eine  $d_{33}$ -Bestimmung richtig verteilt ist, wenn die Ringladungen und der Einfluß der Ringschaltung so gut wie verschwunden sind, beruht auf der aus der obigen Tabelle ersichtlichen Tatsache, daß bei peripherischer, resp. bei zentrischer Belastung die Ringladungen dem Zeichen nach verschieden sind, und daß die Ringladungen kleiner sind, wenn die Ringschaltungseffekte kleiner sind. Über solch langwierige Bestimmungsversuche wird unten noch berichtet.

Zunächst aber setze ich die Mitteilung von Versuchsergebnissen, die mit Turmalin Nr. I gewonnen wurden, fort.

Es liegt nahe, zu versuchen, eine möglichst gleichmäßige Druckübertragung durch Anwendung einer Scheibe aus einem weichen Material als Zwischenlage zu erhalten. Ein  $1/4$  mm dickes Scheibchen aus weichem, braunen Gummi wurde zwischen gut geebnete Stanniolblätter gelegt und von allen Seiten darin eingeschlossen, so daß die bei den Belastungsversuchen zwischen Gummi- und Stanniol entstehende Reibungselektrizität keinen Fehler verursachen konnte. Als dauernde Anfangsbelastung wurden 500 g genommen. Mit dieser Vorrichtung wurden folgende Werte erhalten:

Tabelle 13.

4. Druckübertragung durch ebene Stahlscheiben und eine Zwischenlage, die aus Stanniolblättern mit einer dünnen Gummieinlage besteht.

	Belast.	Piezoelektr. Konst.
		$d_{33} \times 10^8$ C.G.S.
a) Ringe isoliert . . . . .	3500 g	5,62
b) Ringe miteinander verbunden und geerdet	3480 g	5,65
Größe der Ringladungen durch 3500 g Belastung (vgl. oben):		
Oberer Ring mit dem Elektrometer verbunden, unterer Ring und Pole geerdet . . . . .		0,0 Skt.
Unterer Ring mit dem Elektrometer verbunden, oberer Ring und Pole geerdet . . . . .		-0,2 "

Man sieht, daß das Mittel geholfen hat: Nicht nur sind die Ringladungen so gut wie verschwunden, sondern auch die

Ringschaltungen (a und b), die früher so stark verschiedene Werte lieferten, geben jetzt nahezu denselben Wert. Man wird deshalb Ursache haben, diesen Wert (3500—3480 g) für annähernd richtig zu halten. Weiter unten werden noch einige Versuche, in dieser Art angestellt, mitgeteilt werden.

Es entstand weiter die Frage: Wie wird sich der Turmalin bei verschiedenen Belastungsarten verhalten, wenn seine Seitenflächen nicht belegt und nur sorgfältig gereinigt sind. Darüber gibt folgende Tabelle Auskunft:

Tabelle 14.

## II. Turmalin Nr. I ohne Seitenbelegungen.

	Belastung	Piezoelektr. Konst. $d_{33} \times 10^8$ in C.G.S.
1. Druckübertragung durch konkave Messing- platten und Stanniolblätter . . . .	3600 g	(5,46)
2. Druckübertragung durch konvexe Messing- platten und Stanniolblätter . . . .	3460 g	(5,68)
3. Druckübertragung durch ebene Stahl- scheiben und Stanniolblätter . . . .	3550 g	5,54

Der Wert aus Versuchen mit ebener Fläche liegt wieder zwischen denen, die mit hohlen und gewölbten Flächen erhalten sind, aber die Zahlen zeigen keine so große Abweichung, wie die mit belegten Turmalinen erhaltenen.<sup>1)</sup> Man wird deshalb geneigt sein, den letzten Wert für einen dem richtigen Wert naheliegenden zu halten und dementsprechend  $d_{33}$  zu bestimmen versuchen, aus Versuchen mit Turmalinen, die frei von Seitenbelegungen sind, selbstverständlich unter Anwendung von ebenen Stahlplatten mit sorgfältig geglätteter Stanniolzwischenlage.

Bei den Versuchen zur Bestimmung von  $d_{33}$  werden diese Bedingungen natürlich immer erfüllt werden können. Bei Kristallpräparaten parallelipipedischer Form, die außer zur Bestimmung von  $d_{33}$  auch zur Bestimmung von  $d_{22}$  und von  $d_{31}$  dienen, erhalten häufig auch die zur Hauptachse parallelen Flächen Belegungen; diese müßten also vor einer  $d_{33}$ -Bestimmung entfernt werden, wenn das Ergebnis zuverlässig sein soll. Aber

1) Sogar ein Versuch, bei welchem nur eine stumpfe Spitze oben drückte und unten eine Stahlplatte angebracht war, lieferte wenig abweichende Werte.

selbst wenn die Seitenflächen unbelegt sind, kann doch noch leicht ein schädlicher Ringeinfluß auftreten, wenn diese Flächen etwa durch Anfassen mit den Fingern hygroskopisch geworden sind und sich in einer nicht ganz trockenen Umgebung mit einer Spur Feuchtigkeit, die dann als Belegung wirkt, bedeckt haben. Eine solche Fehlerquelle ist namentlich dann zu befürchten, wenn die erzeugte, zu messende Piezoelektrizität nicht wie in der vorliegenden Untersuchung sofort kompensiert wird, sondern zu ihrer Messung einige Zeit erhalten bleiben muß, was z. B. der Fall ist, wenn die Messung durch die Ausschläge einer langsam schwingenden Elektrometernadel ausgeführt wird. Diese Feuchtigkeit brauchte sich nicht immer durch eine mangelhafte Isolation der mit dem Elektrometer verbundenen Polflächen bemerkbar zu machen. Aus diesem Grunde ist bei unseren Versuchen, wie oben auch immer bemerkt wurde, für eine vorzügliche Reinigung der Kristalle gesorgt.

Fortsetzung von Tabelle 14.

	Belastung	Piezoelektr. Konst. $d_{33} \times 10^8$ in C.G.S.
4. Druckübertragung durch ebene Stahlplatten mit den oben beschriebenen Stanniolgummikissen . . . . .	3550 g	5,54

Auch diese Versuchsanordnung wird für die  $d_{33}$ -Bestimmung in Betracht kommen müssen, weil bei ihr eine gleichmäßige Druckverteilung jedenfalls einigermaßen garantiert ist und überdies wegen Abwesenheit der Ringe kein Ringeinfluß existiert. Leider läßt sich dieses Verfahren nicht auf Kristalle mit kleinem Querschnitt anwenden, denn dann ist es bei etwas längeren Stücken nicht zu vermeiden, daß der Kristall infolge der weichen Unterlagen umkippt, sobald eine Belastung angelegt wird.

Zum Schluß dieser Besprechungen ist noch zu erwähnen, daß andere Turmalinkristalle und auch Präparate sich alle qualitativ so verhielten, wie es für den Turmalin Nr. I ausführlich beschrieben wurde. Das Verhalten ist somit ein für alle Turmaline gesetzmäßiges.

Als brauchbare Versuchsanordnung zur  $d_{33}$ -Bestimmung wurden oben folgende bezeichnet:

1. Anwendung von ebenen Stahlplatten mit Stanniolzwischenlage bei einem mit „Ringen“ versehenen Turmalin. Durch Probieren wird die Zwischenlage so lange verändert, bis die durch eine Belastung hervorgerufene Ringladung möglichst klein gemacht ist.

2. Anwendung von ebenen Stahlplatten mit Stanniol-Gummikissen bei einem mit isolierten „Ringen“ versehenen Kristall.

3. Anwendung von ebenen Stahlplatten mit Stanniolzwischenlage bei einem Kristall ohne „Ringe“.

4. Anwendung von ebenen Stahlplatten mit Stanniol-Gummikissen bei einem Kristall ohne „Ringe“.

Ich gebe nun in folgendem einige Versuche aus unserem ziemlich großen Beobachtungsmaterial an.

*Anordnung 1.* Hr. Dr. Freiherr du Prel hat sich der Mühe unterzogen, sieben fehlerfreie brasilianische Turmaline derselben Bezugsquelle, mit ihren belegten natürlichen Seitenflächen und vorzüglich eben geschliffenen Endflächen versehen, zu untersuchen. Die Dimensionen waren ungemein verschieden, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht.

Tabelle 15.

Turmalin	Länge	Querschnitt	Dichte <sup>1)</sup>	Farbe	Belastung	$d_{33} \times 10^6$ in C.G.S.
Nr. I	2,05 cm	0,9844 qcm	3,10	hellgrün	3515 g	5,59
Nr. II	1,55 „	1,6715 „	3,10	„	3505 g	5,61
Nr. III	1,45 „	0,7885 „	3,10	„	3510 g	5,60
Nr. VI	4,27 „	0,8396 „	3,14	dunkelgrün	3530 g	5,57
Nr. VII	7,94 „	4,988 „	3,14	„	3555 g	5,54
Nr. IX	3,32 „	0,1760 „	3,15	„	3560 g	5,52
Nr. X	2,49 „	0,2438 „	3,10	hellgrün	3510 g	5,60

Die Werte der Belastungen, resp. der  $d_{33}$  sind aus je sechs Beobachtungen erhalten; als Beispiel für diese Versuche sei die Versuchsreihe mit Turmalin Nr. I hier angegeben.

1) Eine genauere Angabe der — freilich genauer gemessenen — Dichte ist zwecklos, weil sich herausgestellt hat, daß mitunter Teile eines und desselben anscheinend tadellosen Turmalins eine etwas verschiedene Dichte haben. Die obigen Zahlen sollen zeigen, daß die dunklen Turmaline etwas dichter sind als die hellen.

Tabelle 16.

+ Pol mit dem Elektrometer verbunden	- Pol mit dem Elektrometer verbunden
Belastung: 1. 3500 g 3. 6980 g 5. 3500 g	7. 3530 g 9. 7060 g 11. 3540 g
Entlastung: 2. 3500 g 4. 6980 g 6. 3510 g	8. 3500 g 10. 7060 g 12. 3520 g
Mittel 3500 g	Mittel 3530 g
Gesamtmittel 3515 g	

Unter „+-Pol“ ist der Pol verstanden, der bei Belastung positiv elektrisch wurde. Hinter „Belastung“ stehen die Gewichte, die zum Kompensieren bei Belastung nötig waren. Hinter „Entlastung“ die Gewichte, die bei Entlastung Kompensation herbeiführten. Weshalb die Pole gewechselt wurden und weshalb sowohl die Belastungs- als die Entlastungswerte beobachtet wurden, ist bereits oben mitgeteilt. Die Versuche 3, 4, 9 und 10 wurden mit einer doppelten Ladespannung des Kondensators angestellt: sie zeigen das genügende Vorhandensein einer Proportionalität zwischen Belastung und entwickelter Menge Piezoelektrizität. Eine Belastungsänderung von 20 g konnte noch am Elektrometer wahrgenommen werden.

Aus der Tab. 15 ist nun zunächst zu entnehmen, daß die Turmaline trotz ihrer großen Verschiedenheit in der Größe und in der Farbe ziemlich gleiche Werte der piezoelektrischen Konstante  $d_{33}$  liefernten. Die dunkleren Turmaline erscheinen etwas schwächer piezoelektrisch erregbar, als die hellen; ein Resultat auf das auch weitere Versuche hindeuten. Von einem so großen Unterschied aber, wie wir ihn oben in den pyroelektrischen Konstanten fanden, ist nicht die Rede; dort betrug er z. B. bei den Turmalinen Nr. IX und Nr. X ca. 10 Proz., während sich hier bei diesen Turmalinen ungefähr  $1\frac{1}{2}$  Proz. im gleichen Sinne ergeben.

Spätere Erfahrungen haben gezeigt, daß diese Versuche insoweit unter besonders günstigen Umständen ausgeführt wurden, als es bei ihnen doch nicht gar zu schwer war, den Ringeffekt auf einen kleinen Betrag herabzudrücken, wahrscheinlich infolge der Tatsache, daß die Ringe damals schmäler gewählt wurden als später. Ob aber die erhaltenen Werte von  $d_{33}$  zuverlässiger sind als die späteren, ist trotz ihrer guten Übereinstimmung untereinander fraglich.

Diese Versuche wurden vor ca. drei Jahren gemacht. Ein späterer Versuch, in diesem Jahre angestellt, bei dem nach längerem Probieren der Ringeffekt klein geworden war, was wieder an der guten Übereinstimmung zwischen den Belastungswerten mit „Ring isoliert“ und „Ringen miteinander verbunden und geerdet“ zu erkennen war, ergab:

Turmalin Nr. I Belastung 3560 g, woraus  $d_{33} = 5,52 \times 10^{-8}$ ; ein Wert, der sich nicht auf den obigen  $5,59 \times 10^{-8}$  bringen ließ.

Ein späterer, in gleicher Weise ausgeführter Versuch ergab:

Turmalin Nr. I Belastung 3540 g, woraus  $d_{33} = 5,55 \times 10^{-8}$ .

*Anordnung 2* mit einer Anfangsbelastung von 500 g lieferte bei stets sofortiger Abwesenheit der Ringeffekte folgende Resultate:

Turmalin Nr. I Belastung 3510 g, woraus  $d_{33} = 5,60 \times 10^{-8}$

Turmalin Nr. X<sup>1)</sup> „ 3500 g, „  $d_{33} = 5,61 \times 10^{-8}$ .

*Anordnung 3* lieferte folgende Werte:

Turmalin Nr. I Belastung 3585 g, woraus  $d_{33} = 5,56 \times 10^{-8}$

Turmalin Nr. IX „ 3560 g, „  $d_{33} = 5,52 \times 10^{-8}$

Turmalin Nr. X „ 3525 g, „  $d_{33} = 5,58 \times 10^{-8}$

Parallelipiped aus

Turmalin Nr. III

$4 \times 8 \times 4$  mm (p. 792) „ 3540 g, „  $d_{33} = 5,55 \times 10^{-8}$

do. „ 3570 g, „  $d_{33} = 5,51 \times 10^{-8}$

$4 \times 8 \times 8$  mm (p. 792) „ 3550 g, „  $d_{33} = 5,54 \times 10^{-8}$

Parallelipiped aus

Turmalin Nr. VI

$4 \times 8 \times 8$  mm (p. 766) „ 3580 g, „  $d_{33} = 5,49 \times 10^{-8}$ .

*Anordnung 4* lieferte folgende Werte:

Turmalin Nr. I Belastung 3550 g, woraus  $d_{33} = 5,54 \times 10^{-8}$

Turmalin Nr. X „ 3545 g, „  $d_{33} = 5,55 \times 10^{-8}$ .

Alle obigen Werte sind fast ausnahmslos das Mittel aus Beobachtungen mit den betreffenden Turmalinen in der einen und in der umgekehrten Aufstellung. Manche gleiche Resultate liefernde Versuche sind nicht angeführt.

Stellt man die sechs nach den verschiedenen, als brauchbar bezeichneten Anordnungen erhaltenen, oben angeführten Werte von  $d_{33}$  von Turmalin Nr. I zusammen, so erkennt man, das zwischen dem größten und dem kleinsten ein Unterschied

1) Turmalin Nr. X ließ sich noch eben ohne Kippgefahr untersuchen, Turmalin Nr. IX dagegen nicht mehr.

von 1,5 Proz. besteht. Das ist in Anbetracht der Empfindlichkeit und der Sicherheit der Meßmethode recht viel und ohne Zweifel dem trotz aller Bemühungen noch nicht ganz eliminierten Einfluß einer ungleichmäßigen Druckverteilung zuzuschreiben. Es ist zu erwähnen, daß man nicht berechtigt ist, das Mittel aus allen Werten für den wahrscheinlich richtigsten Wert zu halten. Ist es doch leicht möglich, daß eine der vier Versuchsanordnungen entschieden den Vorzug vor der anderen verdient; mit Sicherheit aber anzugeben, welche das ist, ist nicht gut möglich. Gegen jede derselben läßt sich ein Zweifel erheben. Vielleicht wird man aus naheliegenden Gründen die Anordnung der Druckübertragung mittels ebener Stahlscheiben und einer Zwischenlage eines Gummikissens für die sicherste halten; es entsteht dann aber gleich die Frage, weshalb fördert diese sicherste Anordnung zwei Wertepaare von  $d_{33}$  zutage (5,55 und  $5,54 \times 10^{-8}$  resp. 5,60 und  $5,61 \times 10^{-8}$ ), die doch nur deshalb so verschieden sein können, weil das eine mit ringfreien, das andere mit isoliert belegten Turmalinen erhalten wurde. Die Antwort auf diese Frage kann nun so lauten, daß man sagt: unsere Erfahrungen haben gelehrt, daß das Anbringen von Belegungen auf den Seitenflächen die fälschende Wirkung eines ungleichmäßig verteilten Druckes sehr bedeutend vermehren kann, und deshalb ist dem zweiten Wertepaar eine geringere Genauigkeit als dem ersten zuzuschreiben. Immerhin bleibt aber auch hier eine gewisse Unsicherheit bestehen.

Man wird sich am Schluß dieser Mitteilungen die Frage vorlegen, ob bei unseren Versuchen nicht Faktoren wirksam gewesen sein können, die das Resultat so weit gefälscht haben, daß der wirkliche Wert der piezoelektrischen Konstanten  $d_{33}$  unserer Turmaline noch außerhalb des Intervalls von 5,49 bis  $5,61 \times 10^{-8}$  C.G.S. zu suchen ist. In dieser Beziehung ist zu erwähnen, daß eine Prüfung der vorliegenden Verhältnisse keinen Anhaltspunkt zu einer solchen Vermutung gegeben hat. Der zuletzt von Hrn. Voigt für den von ihm und Riecke untersuchten Turmalin angegebene Wert von  $d_{33}$  beträgt:  $5,7_s \times 10^{-8}$  C.G.S.<sup>1)</sup>

#### *Die Bestimmung der piezoelektrischen Modulen $d_{31}$ und $d_{23}$*

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik p. 869.

wurde an einem Parallelipiped vorgenommen, das aus dem gut durchsichtigen mit keinem sichtbaren Fehler behafteten Turmalin Nr. III geschnitten war. Damit dasselbe die erwünschte Orientierung erhalte, stellte ich mit Hilfe der genügend ausgebildeten Säulenflächen des Turmalins die Richtung einer der drei durch die Hauptachse ( $Z$ -Achse) gehenden Symmetrieebenen ( $YZ$ -Ebene) fest und markierte ihre Spur mit der von der Firma Zeiss zur  $Z$ -Achse senkrecht geschliffenen Endfläche durch einen eingeritzten Strich. Ich schätzte den möglichen Fehler dieser markierten Richtung auf  $0,5^\circ$ . Nachdem dies geschehen war, ersuchte ich die genannte Firma, mir ein Parallelipiped (ca.  $4 \times 8 \times 12$  mm) herausschneiden zu lassen, dessen Kanten parallel den  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ -Achsen sein sollten, was ja mit Hilfe der erwähnten Fläche und des darauf sichtbaren Striches leicht zu bewerkstelligen sein müßte. Nach dem Fertigstellen dieses Stücks sollte dasselbe in zwei Teile von den ungefähren Dimensionen  $4 \times 8 \times 4$  mm, resp.  $4 \times 8 \times 8$  mm zerlegt werden. Alle Flächen seien fein, matt zu schleifen. Es zeigte sich nun nach dem Empfang der Präparate, daß die vorgezeichnete Richtung der  $Y$ -Achse nicht genügend berücksichtigt worden war. Ich ließ deshalb das kleinere Parallelipiped noch einmal nachschleifen — wobei der erwähnte Strich erhalten blieb —, was dann den erwünschten Erfolg hatte. Die Messung der Dimensionen mit dem Abbéschen Dickenmesser ergab folgendes: Das Stück ist etwas keilförmig, indem die Dicke in der Richtung der  $Z$ -Achse an dem einen Ende 4,41 mm, an dem anderen 4,43 mm beträgt. Keine Abweichung von 0,01 mm zeigten die Dimensionen in der Richtung der  $X$ -Achse (4,18 mm) und die in der Richtung der  $Y$ -Achse (7,28 mm). Fehler in der Richtung der mit der  $Z$ -Achse parallel sein sollenden Flächen ließen sich nicht entdecken.

Um zu der Kenntnis der Werte von  $d_{31}$  zu gelangen, soll man entweder auf die zur  $X$ -Achse, oder auf die zur  $Y$ -Achse senkrechte Fläche einen gleichmäßig verteilten normalen Druck ausüben und in beiden Fällen das in der Richtung der  $Z$ -Achse durch diesen Druck erzeugte elektrische Moment der Volumeneinheit beobachten. Bezeichnen wir mit  $P$  den Gesamtdruck, mit  $e$  die auf einer zur  $Z$ -Achse senkrecht stehenden Belegung, durch diesen Druck freiwerdende Menge Piezoelektrizität, mit

$a, b, c$  die Kanten des Parallelipipedes in der Richtung der  $X, Y, Z$ -Achse, so ist:

$$d_{31} = \frac{c}{a} \cdot \frac{e}{P} \quad \text{oder} \quad \frac{c}{b} \cdot \frac{e}{P}$$

je nachdem der Druck parallel der  $X$  oder der  $Y$ -Achse ausgeübt wird.

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die erwähnten Belegungen die ganzen zur  $Z$ -Achse senkrechten Flächen bedecken. Das ist nun nicht möglich, da die beiden benachbarten  $b \times c$ - resp.  $a \times c$ -Flächen mit geerdeten Metallstücken (Stanniol) gedrückt werden müssen. Zur Druckübertragung isolierende Körper Hartgummi oder Glimmer zu nehmen, ist, wie schon erwähnt, nicht empfehlenswert. Es bleibt nichts anderes übrig, als an den Rändern der beiden zur  $Z$ -Achse senkrechten Belegungen oder wenigstens an der, die mit dem Elektrometer verbunden werden soll, sehr schmale Streifen unbelegt zu lassen, was zur Isolation dann vollständig ausreicht. Dadurch kommt aber auch eine ziemliche Unsicherheit in die  $d_{31}$ -Bestimmung hinein: die beobachtete Menge Piezoelektrizität ist zu klein; es fehlt die Menge, die sich auf den nicht belegten Isolierstreifen entwickeln würde, wenn diese belegt wären. Würde man die gemessene Elektrizitätsmenge im Verhältnis der ganzen Fläche zu dem belegten Teil vergrößern, so käme beispielsweise folgende Korrektion heraus. Die ganze Fläche betrug  $7,28 \times 4,18$  qmm, der belegte Teil  $6,90 \times 3,44$  qmm (d. h. jeder Streifen war  $0,2 - 0,3$  mm breit). Demnach wäre der direkt gefundene  $e$ - oder  $d_{31}$ -Wert mit 1,282 zu multiplizieren oder mit anderen Worten um 28 Proz. zu vergrößern. Diese Korrektion in vollem Betrage anzubringen schien mir aber nicht zulässig zu sein, denn die Belegung erhält durch Influenz- oder vielleicht auch durch Leitung jedenfalls einen Betrag der fehlenden Ladung, und so habe ich mich, natürlich nicht ohne Willkür, für die Hälfte des angegebenen Betrages entschieden und damit natürlich auf eine genaue Bestimmung von  $d_{31}$  Verzicht leisten müssen. Von ersichtlichem Vorteil wäre es gewesen, wenn mir Stücke von wesentlich größeren Dimensionen ( $b$ ) zur Verfügung gestanden hätten. Das war aber nicht der Fall und außerdem schien es mir von einigem Interesse zu sein, die Versuche mit Parallelipipeden anzustellen, die die

ungefähr Dimensionen hatten, wie die von Herren Voigt und Riecke benutzten.

Die Versuchsanordnung war sonst im wesentlichen dieselbe wie bei den  $d_{33}$ -Versuchen. Nur mußte eine geringere Potentialdifferenz für die Ladung des Curieschen Kondensators benutzt werden, als die eines Cadmiumelements, weil sonst zu große Belastungen des Turmalins verwendet werden müßten. Das geschah durch passende Abzweigung von einem größeren Widerstand, mit dem die Elemente — bei einzelnen Versuchen waren es vier nebeneinander geschaltete, bei anderen nur ein einzelnes Element — für nicht zu lange Zeit kurz geschlossen waren. Die durch den Kurzschluß bewirkte gemessene geringe Veränderung der Klemmspannung der Elemente wurde berücksichtigt. Als Auflagekörper auf die sorgfältig eben geschliffenen Kristallflächen dienten wiederum die oben erwähnten Stahlstücke mit angeschliffenen polierten Planflächen und als Zwischenlage kamen wieder einige Stanniolblättchen zur Verwendung. Die gedrückten Flächen waren zur Sicherheit entweder mit Graphit oder mit Silber leitend gemacht und selbstverständlich beim Versuch geerdet. Die Verbindung mit dem Elektrometer resp. mit der Erde der senkrecht zur  $Z$ -Achse angebrachten Belegungen wurde durch leichte, gut gereinigte Messingfederchen hergestellt. Daß die Kristalle wieder vor dem Versuch mit Rücksicht auf eine gute Isolation sorgfältig gereinigt waren, brauche ich kaum zu erwähnen.

Ich führe nun zunächst einige Versuche an, die in der letzten Zeit mit Benutzung der allmählich gemachten Erfahrungen ausgeführt wurden.

#### Versuch 1.

Druck parallel der  $Y$ -Achse. Druckübertragung durch die erwähnten Stahlplatten und Stanniol.

Flächen  $\perp$  zur  $X$ -Achse unbelegt.

Dimensionen der Belegung  $\perp$  zur  $Z$ -Achse:  $6,90 \times 3,44$  qmm.

Ladespannung des Kondensators:  $100/412 \times 1,018$  Volt.

Kompensierende Belastung des Turmalins: 3670 g.

Daraus: Wert von  $d_{31}$  unkorrigiert:  $0,79 \times 10^{-8}$  C.G.S.

„ „  $d_{31}$  korrigiert:  $0,90 \times 10^{-8}$  C.G.S.

#### Versuch 2.

Druck parallel der  $X$ -Achse. Druckübertragung wie oben.

Flächen  $\perp$  zur  $Y$ -Achse graphitiert, aber isoliert.

Dimensionen der Belegung  $\perp$  zur  $Z$ -Achse wie oben.

Ladespannung des Kondensators:  $89/412 \times 1,018$  Volt.

Kompensierende Belastung des Turmalins: 5120 g. (NB. 50 g Mehrbelastung sind eben noch am Elektrometer bemerkbar.)

Daraus: Wert von  $d_{31}$  unkorrigiert:  $0,88 \times 10^{-8}$  C.G.S.

„ „  $d_{31}$  korrigiert:  $1,00 \times 10^{-8}$  C.G.S.

### Versuch 3.

Druck parallel der  $X$ -Achse. Druckübertragung wie oben.

Flächen  $\perp$  zur  $Y$ -Achse unbelegt.

Dimensionen der Belegung  $\perp$  zur  $Z$ -Achse:  $7,18 \times 3,74$  qmm. Isolierstreifen dieser Belegung nur an den beiden der  $X$ -Achse parallelen Kanten angebracht.

Ladespannung des Kondensators:  $99/433 \times 1,018$  Volt.

Kompensierende Belastung des Turmalins: 5120 g.

Daraus: Wert von  $d_{31}$  unkorrigiert:  $0,98 \times 10^{-8}$  C.G.S.

„ „  $d_{31}$  korrigiert:  $0,98 \times 10^{-8}$  C.G.S.

Gegen diese Versuche kann ich im allgemeinen keinen Einwand erheben; es ist aber auffallend, daß die Werte so viel größer sind als der von Hrn. Voigt p. 869 seines Lehrbuchs der Kristallphysik angegebene:  $0,744 \times 10^{-8}$ . Daß der Grund dieser Abweichung in einer falschen Orientierung meines Präparats gelegen sein sollte, könnte ich nach dem oben Mitgeteilten nicht zugeben, und zwar um so weniger, als sowohl Abweichungen in der  $Z, Y$ -Ebene, als in der  $X, Y$ -Ebene auf das Resultat wenig Einfluß haben, wie aus einer Diskussion der Gleichungen im genannten Lehrbuch p. 865 hervorgeht.

Zum Nachweis der oben aufgestellten Behauptung, daß die Anwendung von Glimmerblättchen als isolierendes Material für die Druckübertragung bedenklich erscheint, sei angegeben, daß Versuche mit solchen Blättchen, in derselben Weise ausgeführt wie oben, Werte von  $d_{31}$  lieferten, die zwischen  $0,82$  und  $1,53 \times 10^{-8}$  schwankten. Ähnliche Verschiedenheiten wurden mit Hartgummiplatten gefunden.

Frühere Versuche mit dem oben erwähnten größeren Parallelipiped aus Turmalin Nr. III ergaben ungefähr dieselben Werte: Alle waren jedenfalls größer als der Voigtsche Wert. Sie hier einzeln anzuführen, ist nicht zweckmäßig, weil die Dimensionen der Belegungen nicht genau genug bestimmt wurden. Erwähnt muß aber noch werden, daß auch bei

dieser Bestimmung wie bei der von  $d_{33}$  sich bedeutendere Einflüsse der Art der Druckübertragung, zentrisch oder peripherisch, bemerkbar machten, auch war es in solchen Fällen eines ungleichmäßig verteilten Druckes für das Resultat nicht gleichgültig, ob das Seitenpaar, das nicht gedrückt und nicht mit dem Elektrometer verbunden war, unbelegt blieb oder belegt und geerdet wurde.

Nach dem, was hier über die Resultate der  $d_{31}$ -Bestimmungen mitgeteilt wurde, wird man wohl mit mir der Ansicht sein, daß diese Ergebnisse eine ziemliche Unsicherheit über die Zuverlässigkeit dieser Bestimmungen bestehen lassen.

Die Werte von  $d_{22}$  wurden aus Versuchen abgeleitet, die wiederum mit den erwähnten aus Turmalin Nr. III hergestellten Parallelipipeden (ca.  $4 \times 8 \times 4$  mm resp.  $4 \times 8 \times 8$  mm) angestellt wurden. Als Druckrichtung wurde die in einer Symmetrieebene gelegene, zur Hauptachse Senkrechte ( $Y$ -Achse) gewählt und das in dieser Richtung erzeugte elektrische Moment gemessen. Der Ausdruck 118<sup>1</sup> p. 865 von Voigts Lehrbuch der Kristallphysik ergibt nach Einsetzen der betr. Werte der piezoelektrischen Moduln einen ungemein starken Einfluß einer in der Symmetrieebene gelegenen Abweichung der Druckrichtung von der  $Y$ -Achse auf das Resultat; man findet z. B., daß ein Fehler von 2 Bogenminuten den Wert von  $d_{22}$  bereits um 1 Proz. fälscht. Wenn nun auch, wie bereits mitgeteilt, auf die Herstellung des Präparats Sorgfalt verwendet wurde, so sind doch Abweichungen von einigen Bogenminuten recht gut möglich und danach ist die Zuverlässigkeit der unten angegebenen Resultate zu beurteilen. Die ziemlich gute Übereinstimmung der an den zwei Parallelipipeden verschiedener Größe und etwas verschiedener Orientierung (vgl. p. 792) erhaltenen Werte läßt allerdings vermuten, daß der genannte Fehler nicht besonders groß ist. Ich führe nun alle zu sehr verschiedener Zeit im Laufe der beiden letzten Jahre erhaltenen Werte von  $d_{22}$  an:

1	2	3	4	5	6	7	8	$0,91 \times 10^{-8}$ C.G.S.
0,95	0,88	0,87	0,91	0,97	0,96	0,97	0,91	$0,91 \times 10^{-8}$ C.G.S.

Jede Zahl wurde nach einer neuen Aufstellung der Kristalle erhalten. Die vier ersten Werte ergab das größere Paralleliped. Die Verschiedenheit der bei je einem Paralleliped

gefundenen Werte untereinander ist keineswegs auf eine Meß- ungenauigkeit — es kämen nur die Belastungen der Turmaline und die Ladespannungen des Kondensators in Betracht — zurückzuführen: sie ist unzweifelhaft wieder verursacht durch die bei allen piezoelektrischen Versuchen mit Turmalinen kaum zu vermeidende, der Stärke und der Richtung nach ungleichmäßige Druckverteilung. Der erste, vierte, fünfte und achte Versuch sind in dieser Beziehung wohl am einwandfreisten, weil sie mit polierten Stahlflächen und Stanniolunterlage ausgeführt wurden.

Nehmen wir aus ihnen das Mittel, so erhalten wir  $d_{22} = 0,94 \times 10^{-8}$  C.G.S., was aus mir nicht bekannten Ursachen wiederum bedeutend von dem von Hrn. Voigt angegebenen  $d_{22} = 0,687 \times 10^{-8}$  abweicht.

---

Bei allen Versuchen zur Bestimmung der piezoelektrischen Konstanten  $d_{33}$ ,  $d_{31}$ ,  $d_{22}$  eines Turmalinkristalls wurden folgende Erfahrungen gemacht. Trotz immer verbesserter Technik und trotzdem das eigentliche Meßverfahren durchaus die Garantie bietet für eine erwünschte Genauigkeit der Resultate — was sich z. B. bei meiner Bestimmung der Curieschen Konstante des Quarzes gezeigt hat — blieb in dem ganzen Verfahren eine unbehagliche Unsicherheit bestehen. Sie wird höchstwahrscheinlich dadurch verursacht, daß man keine vollständig genügende Gewißheit darüber erlangen kann, ob die für das Gelingen der Versuche notwendige Gleichmäßigkeit der Druckverteilung, was Größe und Richtung anbetrifft, vorhanden ist. Auch läßt noch die Sicherheit über die Richtigkeit der Orientierung wenigstens in einem Falle sehr zu wünschen übrig. Beide Fehlerquellen würden natürlich an Bedeutung verlieren, wenn man den Präparaten solche Dimensionen geben könnte, wie sie bei meinen Quarzlamellen vorhanden waren. Gewiß werden die nach Ausprobieren der günstigsten Bedingungen gewonnenen Resultate, wie sie oben angegeben sind, die gesuchten Werte ungefähr darstellen, aber mit voller Sicherheit anzugeben, wie groß die Fehlergrenze ist, ist mir nicht möglich. Da außerdem die pyroelektrischen Versuche ergeben haben, daß die pyroelektrische Konstante sogar bei zwei Stücken aus

demselben Kristall verschieden ausfallen kann, so hielt ich es für aussichtslos, weitere Versuche anzustellen, um eine Antwort auf die anfänglich gestellte Frage zu erhalten: wie wird ein vorhandenes elektrisches Moment der Volumeinheit des Turmalins bloß durch die Temperatur beeinflußt, mit anderen Worten wie ist der Temperaturverlauf der sog. „wahren Pyroelektrizität“ des Turmalins beschaffen.

#### 5. Frage nach der Existenz einer wahren Pyroelektrizität.

Am Schluß dieser Mitteilung möchte ich noch kurz auf die Frage nach der Existenz einer wahren Pyroelektrizität zurückkommen. Nach der Theorie des Hrn. Voigt existiert eine solche, wenn der Ausdruck:

$$\gamma' = \frac{(s_{11} + s_{12}) \alpha_3 - 2 s_{13} \alpha_1 + (s_{33} \alpha_1 - s_{13} \alpha_3) 2 \frac{d_{31}}{d_{33}}}{s_{33} (s_{11} + s_{12}) - 2 s_{13}^2} \times d_{33},$$

der die lediglich aus den thermischen Deformationen berechnete pyroelektrische Erregung darstellt, einen anderen Wert ergibt, als die beobachtete pyroelektrische Konstante  $\gamma$ . Hr. Voigt hebt in seinen letzten Veröffentlichungen besonders hervor, daß ein solcher Vergleich nur dann zu bündigen Schlüssen berechtigt, wenn alle vorkommenden Konstanten an einem und demselben Kristall gemessen werden. Nach meinen Erfahrungen, die in obigem mitgeteilt sind, ist die Bestimmung namentlich der elektrischen Konstanten des Turmalins noch mit mancher Unsicherheit verknüpft. Sie war zunächst die Ursache, daß ich den ursprünglich gefaßten Plan nach einer Veränderung der wahren Pyroelektrizität mit der Temperatur zu suchen und diese event. zu messen, aufgab; sie war es aber auch, die bei mir allmählich Zweifel darüber aufkommen ließen, ob die Voigtschen Versuche auch wirklich ausreichen, um die Existenz einer wahren Pyroelektrizität endgültig darzutun. Es scheint mir jetzt nicht ausgeschlossen zu sein, daß diese Unsicherheiten auch bei jenen Versuchen das Resultat wesentlich beeinflußt haben.

Dieser Zweifel wurde noch weiter verstärkt durch das Ergebnis meiner Neubestimmung der Curieschen piezoelektrischen Konstante des Quarzes, die zu Werten geführt hat, welche ich zwar für die richtigen halten muß, die aber mit

den von früheren Beobachtern an anders geformten Präparaten erhaltenen nicht übereinstimmen.<sup>1)</sup>

Auch darf ich wohl noch erwähnen, daß eine Berechnung der Größe der „wahren Pyroelektrizität“ mit Hilfe der bei der vorliegenden Arbeit erhaltenen Werte, deren Unsicherheit ich zwar an manchen Stellen dieser Mitteilung hervorgehoben habe, die ich aber nicht für unsicherer halten kann, als die des Hrn. Voigt, nicht zu dem Voigtschen Resultat führen. Allerdings sind nicht *alle* Konstanten, die in dem obigen Ausdruck für  $\gamma'$  vorkommen, von mir bestimmt worden: es fehlt die Bestimmung von Elastizitätsmodulen  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  und  $s_{13}$ ; auch wurde  $s_{33}$  nicht am Turmalin Nr. III, der die übrigen Konstanten lieferte, gemessen, sondern an einem Stäbchen aus einem gleichgefärbten brasilianischen Turmalin derselben Sendung.<sup>2)</sup> Man wird deshalb unter Hinweis auf die von Hrn. Voigt aufgestellte obenerwähnte Bedingung die Berechtigung zur Berechnung von  $\gamma'$  mit unseren Werten bestreiten können. Ich möchte mir aber trotzdem erlauben, diese Berechnung hier mitzuteilen, indem ich dabei von folgenden Erwägungen ausgehe. Erstens erscheint es mir nicht wahrscheinlich zu sein, daß angesichts der Übereinstimmung des von Lissauer gefundenen Wertes von  $s_{33}$  mit dem Voigtschen eine Neubestimmung der  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  und  $s_{13}$  wesentlich verschiedene Werte geliefert hätte, und zweitens sind zwar von Hrn. Voigt wohl alle Konstanten an Präparaten aus einem Kristall beobachtet, aber ob deshalb alle Präparate in ihren, namentlich elektrischen, Eigenschaften auch wirklich gleichartig waren, das steht doch angesichts der Versuche von Hrn. Riecke und mir, nach denen ein anscheinend homogener Kristall an zwei Stellen verschieden stark pyroelektrisch erregbar sein kann, nicht fest. Hr. Voigt und ich befinden uns deshalb in etwas ähnlicher Lage, wenn ich auch selbstverständlich zugeben muß, daß mein unten mitzuteilendes Ergebnis der Rechnung besser gestützt wäre, wenn

1) W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. 41. p. 490. 1913. Hr. Voigt teilte mir freundlichst mit, daß Frau Curie ihn auf einen späteren von J. Curie erhaltenen, erst in S. Curie, *Traité de radioactivité*, p. 18, veröffentlichten Wert aufmerksam gemacht habe, der dem meinigen sehr nahe liegt.

2) W. Lissauer, Diss. München 1907.

ich die Werte  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{13}$  aus eigenen Versuchen an Präparaten aus Turmalin Nr. III abgeleitet hätte.

Folgende Werte sollen nun in den Ausdruck für  $\gamma'$  eingesetzt werden:

$$\left. \begin{array}{l} d_{33} = 0,0541 \quad \left. \begin{array}{l} \text{kg/qcm als Druckeinheit, Mittel} \\ \text{aus den vier Werten von p. 788 u. 790} \end{array} \right\} \\ d_{31} = 0,0094 \quad \left. \begin{array}{l} \text{kg/qcm als Druckeinheit, p. 794 u. 795} \\ \alpha_1 = 3,51 \times 10^{-6} \quad \left. \begin{array}{l} \text{für } t = 20^\circ \text{ (Werte mit kleiner} \\ \text{Unsicherheit behaftet)} \end{array} \right\} \\ \alpha_3 = 8,72 \times 10^{-6} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Unsicherheit behaftet)} \\ s_{11} = 3,91 \times 10^{-7} \\ s_{12} = -1,01 \times 10^{-7} \\ s_{13} = -0,16 \times 10^{-7} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Werte nach Hrn. Voigt).} \\ s_{33} = 6,12 \times 10^{-7} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Wert von uns in Übereinstimmung mit dem Voigt-} \\ \text{schen gefunden).} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{An Turmalin Nr. III} \\ \text{beobachtet} \end{array} \right\}$$

Daraus ergibt sich:

$$\gamma' = 1,05.$$

Aus den eingangs mitgeteilten pyroelektrischen Beobachtungen berechnet man für  $t = 20^\circ$  den von  $\gamma'$  wenig verschiedenen Wert

$$\gamma = 1,01.$$

Demnach liefert die Berechnung unserer Versuche mit Turmalin Nr. III kein Anzeichen für die Existenz einer wahren Pyroelektrizität in diesem Kristall (Hr. Voigt fand bekanntermaßen für seinen Turmalin  $\gamma$  um etwa 20 Proz. größer als  $\gamma'$ ).

Wenn ich auch aus den mehrfach in dieser Mitteilung angegebenen Gründen diesem Ergebnis keineswegs volle Beweiskraft für die Nichtexistenz einer wahren Pyroelektrizität beilegen kann, so hat dasselbe doch, wie gesagt, auch dazu beigetragen, mich in meiner durch die gemachten Erfahrungen allmählich gewonnenen Ansicht zu bestärken, daß es noch weiterer Versuche bedarf, um das Vorhandensein dieser Pyroelektrizität außer allen Zweifel zu setzen, oder, wie ich mich lieber ausdrücken möchte, um den Betrag der wahren Pyroelektrizität, deren Existenz mir aus theoretischen Gründen wahrscheinlich zu sein scheint, festzustellen.

München, Physik. Institut d. Universität, Juni 1914.

(Eingegangen 20. Juli 1914.)

en.  
h.  
in.  
III  
t.  
b.  
er.  
ur.  
en  
er.  
/).  
n.  
is.  
ei.  
ei.  
en  
ch  
ro.  
ch  
ro.  
en